

Час безвідмовної роботи високонадійної напівмарківської системи двох ліфтів

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.094>

Валентина Кушнір
Кафедра вищої математики
ННІ КІТІ НУВГП
Рівне, Україна
v.p.kushnir@nuwm.edu.ua

Олександр Кушнір
Рівне, Україна
kuchniroo@gmail.com

Анотація — Наводяться кількісні оцінки швидкості збіжності функції розподілу напрацювання на відмову високонадійної системи двох ліфтів до показникової у припущенні, що інтервали робочого стану обох альтернувальних процесів мають показниковий розподіл. Також оцінюється гарантований час безвідмовної роботи цієї системи

Ключові слова — альтернувальний процес відновлення, система двох ліфтів, теорема Реньї, напівмарківський процес, напрацювання на відмову

I. ВСТУП

В [1] наводяться рівномірні оцінки відхилення від функції показникового розподілу розв'язків інтегрального рівняння типу відновлення.

$$\Phi = \theta L + (1 - \theta) \Phi * K, \quad (1)$$

де L , K — задані функції розподілу невід'ємних випадкових величин, $\theta \in (0; 1)$, $*$ — згортка функцій розподілу: $\Phi * K(t) = \int_0^t \Phi(t-x) dK(x)$.

Ці оцінки можна використати при дослідженні характеристик надійності системи двох ліфтів (або дубльованої відновлюваної системи [2, с.73]). У статті [3] наводилася асимптотика функції розподілу часу безвідмовної роботи цієї системи у загальному випадку.

Метою даної роботи є кількісні оцінки цієї функції у випадку показникових розподілів проміжків роботи. Також оцінюється гарантований час безвідмовної роботи із заданою надійністю. В [4] розглянуто більш загальну систему, але в даній роботі оцінки уточнені саме для випадку $N=2$.

II. ОСНОВНІ УМОВИ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

A. Гарантований час безвідмовної роботи системи

Система двох ліфтів складається з двох незалежних альтернувальних процесів відновлення. Відмова системи настає, коли обидва альтернувальні процеси перебувають у фазі відновлення.

У цій роботі вважаємо, що проміжки роботи мають показникові розподіли з параметрами u , v . Будемо позначати $m(F) = m_1(F)$, $m_2(F)$ — математичне сподівання та другий початковий

момент відповідно випадкової величини з функцією розподілу $F(t)$.

Позначимо функції розподілу фаз відновлення B_1 та B_2 відповідно, показникову функцію розподілу $E_a(t) = 1 - e^{-at}$, $t \geq 0$, $\beta_i(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dB_i(x)$, $i = 1, 2$.

Назвемо t гарантованим часом безвідмовної роботи системи із надійністю γ , якщо ймовірність того, що система не відмовить до часу γ , є не меншою від γ .

Теорема 1. Нехай у початковий момент часу обидва альтернувальні процеси знаходяться в робочій фазі. Гарантований час безвідмовної роботи системи двох ліфтів із надійністю γ не менший від

$$\frac{1-\theta}{\theta(u+v)} \ln \frac{1-\theta}{\gamma+2\theta\kappa'}$$

$$\text{де } A_1(t) = \frac{1}{\beta_1(u)} \int_0^t e^{-ux} dB_1(x),$$

$$A_2(t) = \frac{1}{\beta_2(v)} \int_0^t e^{-vx} dB_2(x),$$

$$\theta_1 = 1 - \beta_1(v), \theta_2 = 1 - \beta_2(u), \theta = \frac{u}{u+v} \theta_1 + \frac{v}{u+v} \theta_2,$$

$$A(t) = \frac{u}{u+v} \frac{\beta_1(v)}{1-\theta} A_1(t) + \frac{v}{u+v} \frac{\beta_2(u)}{1-\theta} A_2(t),$$

$$m_j(A) = \frac{u}{u+v} \frac{\beta_1(v)}{1-\theta} m_j(A_1) + \frac{v}{u+v} \frac{\beta_2(u)}{1-\theta} m_j(A_2),$$

$$m_j(A_i) \leq m_j(B_i), i, j = 1, 2, K(t) = E_{u+v} * A(t),$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{m_2(K)}{2m^2(K)} = \frac{\frac{2}{(u+v)^2} + \frac{2m(A)}{u+v}}{2\left(\frac{1}{u+v} + m(A)\right)^2} \leq \\ &\leq 1 + \frac{(m_2(A) - m^2(A))(u+v)^2}{2}. \end{aligned}$$

B. Оцінка функції розподілу часу безвідмовної роботи системи

Функцію розподілу часу безвідмовної роботи системи двох ліфтів позначатимемо $\Psi(t)$, якщо у початковий момент часу обидва альтернувальні процеси знаходяться в робочій фазі.

Теорема 2. Для функції розподілу часу безвідмовної роботи системи двох ліфтів при різних початкових умовах виконуються нерівності

$$|\Psi(t) - (1 - \theta)E_a(t)| \leq 2\theta\kappa + \varepsilon, \quad t \geq 0,$$

де $r = \frac{\theta}{1-\theta}$, $q = \frac{r}{m(L)} \leq r(u+v)$, $\varepsilon = \frac{u\theta_1}{v} + \frac{v\theta_2}{u}$.

III. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Лема 1. Нехай $V(t)$ — невід’ємна монотонна функція, $F(t)$ — функція розподілу невід’ємної випадкової величини,

$$\theta = \int_0^{\infty} V(x) dF(x), \quad L(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^t V(x) dF(x).$$

Тоді, якщо $V(t)$ неспадна, то при всіх $t > 0$ виконується нерівність $L(t) \leq F(t)$, а якщо $V(t)$ незростаюча, то нерівність $L(t) \geq F(t)$.

Лема 2.

$$E_q * L(t) \geq E_q(t) - q \int_0^t (1 - L(x)) dx, t \geq 0.$$

Лема 3. (Нерівність Чебишова). Якщо $F(x)$ — функція розподілу, функція $f(x)$ неспадна, а $g(x)$ незростаюча, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dF(x) &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x). \end{aligned}$$

IV. ДОВЕДЕННЯ

A. Доведення леми 1

Якщо $V(x)$ — неспадна, то функція $F - L$ зростає від 0, поки $V(x) < \theta$, а потім спадає до 0 на нескінченності. Тому вона невід’ємна. Аналогічно розглядається випадок незростаючої $V(x)$.

B. Доведення леми 2

$$\begin{aligned} E_q * (1 - L)(t) &= q \int_0^t (1 - L(t-x)) e^{-qx} dx \leq \\ &\leq q \int_0^t (1 - L(t-x)) dx = \\ &= q \int_0^t (1 - L(x)) dx. \end{aligned}$$

C. Доведення леми 3

Для всіх дійсних x та y :

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \leq 0.$$

Тоді

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dF(x)dF(y) \leq 0.$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, отримаємо твердження леми.

D. Доведення теореми 1

Якщо у початковий момент часу обидва альтернувальні процеси знаходяться в робочій фазі, то функція розподілу безвідмовної роботи системи двох ліфтів $\Psi(t)$ є розв’язком рівняння (1) із

$$\begin{aligned} K(t) &= E_{u+v} * A(t), \\ L(t) &= E_{u+v} * \left(\frac{u}{u+v} \frac{\theta_1}{\theta} L_1(t) + \frac{v}{u+v} \frac{\theta_2}{\theta} L_2(t) \right), \end{aligned}$$

де $L_1(t) = \frac{1}{\theta_1} \int_0^t v e^{-ux} (1 - B_1(x)) dx$,

$$L_2(t) = \frac{1}{\theta_{21}} \int_0^t u e^{-vx} (1 - B_2(x)) dx.$$

Позначимо $\Phi(t)$ розв’язок рівняння (1) із $L(t) = K(t)$, для якого, згідно з [1, Теор. 2], виконуються рівномірні оцінки

$$|\Phi(t) - E_q(t)| \leq 2rx, t \geq 0. \quad (2)$$

Функція $\Psi(t)$ подається через $\Phi(t)$ формулою

$$\Psi(t) = L * (\theta + (1 - \theta) \Phi(t)). \quad (3)$$

З (2), (3) отримуємо

$$\Psi(t) \leq (1 - \theta) E_q(t) + \theta(1 + 2x). \quad (4)$$

Якщо прирівняти праву частину цієї нерівності до $1 - \gamma$, то можна виразити гарантований час безвідмовної роботи (потім використовуємо нерівність $q \leq r(u+v)$). Нерівності $m_j(A_i) \leq m_j(B_i)$, $i, j = 1, 2$ випливають із того, що $A_i(t) \geq B_i(t)$ при всіх $t > 0$, що, в свою чергу, отримується з леми 1.

E. Доведення теореми 2

Враховуючи лему 2, з (2), (3) отримуємо

$$\begin{aligned} \Psi(t) &\geq L * (\theta + (1 - \theta)(E_q(t) - 2rx)) \geq \\ &\geq \theta + (1 - \theta)(E_q(t) - qm(L)) - 2\theta x. \end{aligned} \quad (5)$$

За лемою 3,

$$\begin{aligned} m(L_1) &= \frac{1}{\theta_1} \int_0^{+\infty} x(1 - B_1(x)) dE_v(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{\theta_1} \int_0^{+\infty} x dE_v(x) \cdot \int_0^{+\infty} (1 - B_1(x)) dE_v(x) = \\ &= \frac{1}{v}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{Аналогічно} \quad m(L_2) \leq \frac{1}{u}. \quad (7)$$

Із (6), (7) отримуємо

$$\begin{aligned} m(L) &= m(E_{u+v}) + \frac{u}{u+v} \frac{\theta_1}{\theta} m(L_1) + \frac{v}{u+v} \frac{\theta_2}{\theta} m(L_2) \leq \\ &\leq \frac{1}{u+v} + \frac{u}{u+v} \frac{\theta_1}{\theta} \frac{1}{v} + \frac{v}{u+v} \frac{\theta_2}{\theta} \frac{1}{u}. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставивши (8) у (5), дістанемо

$$\Psi(t) \geq (1 - \theta) E_q(t) - \varepsilon - 2\theta x.$$

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

- [1] Карташов Н. В. "Неравенства в теореме Реньи". Теория вероятностей и математ. статистика. Том 45, 1991. С. 27–33.
- [2] Корольок В. С. "Стохастичні моделі систем": Навч. посібник. Київ: Либідь, 1993. — 136 с.
- [3] Кушнір О.О. "Перша відмова високонадійної системи двох ліфтів". Теорія ймовірностей та математ. статистика. Том 59, 1998. С. 110 – 116.
- [4] Кушнір О.О., Кушнір В.П. "Оцінки функції розподілу напрацювання на відмови високонадійної системи N-1 з N у випадку показникових розподілів інтервалів робочого стану усіх альтернувальних процесів". Кібернетика та системний аналіз. Том 60, № 3, 2024. С. 135 – 140.