

# Дискретні періодичні шуми та їх використання при побудові періодичних послідовностей

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.098>

Микола Приймак  
Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя.  
м. Тернопіль, Україна.  
[pmw.ukr@ukr.net](mailto:pmw.ukr@ukr.net)

**Анотація**—Наведено означення дискретного періодичного білого шуму та визначені білі шуми з конкретними розподілами, проведена класифікація таких шумів. Як приклад подані визначення рівномірного та пуассонівського періодичних шумів. Сформульовано теореми, згідно яких послідовності ковзного середнього і авторегресії при дії періодичного шуму є періодичними. Отримані результати відкривають перспективні напрямки дослідження реальних періодичних шумів та послідовностей ковзного середнього і авторегресії, які використовуються при обґрунтуванні конструктивних моделей дискретних стохастично періодичних сигналів.

**Ключові слова** — шум, дискретний шум, дискретний періодичний шум, класифікація періодичних шумів, періодичні послідовності ковзного середнього і авторегресії.

## I. ВСТУП

Вагоме місце в теорії випадкових процесів посідають білі шуми, тобто процеси з незалежними значеннями. Розрізняють шуми з неперервним і дискретним аргументом (часом), які називають дискретними шумами. Серед дискретних шумів добре вивченими є стаціонарні шуми, зокрема базовий білий шум.

В прикладних дослідженнях часто зустрічаються шуми, характерною ознакою яких є стохастична періодичність. Проте такі шуми в порівнянні із стаціонарними вивчені в значно меншій мірі. Враховуючи це, актуальними є задачі дати визначення таких шумів, провести їх класифікацію та дослідити їх роль в утворенні періодичних випадкових послідовностей на прикладах ковзного середнього і авторегресії.

## II. РЕЗУЛЬТАТИ

Білий шум.

Означення 1. Білим шумом з дискретним часом називається послідовність випадкових величин

$$\eta_i = \eta(i\Delta t), i \in Z, \quad (1)$$

будь-які два значення якої є некорельованими (незалежними).

Розрізняють дискретний білий шум в широкому і вузькому розумінні в залежності від того, якими є значення послідовності (1) – некорельованими чи незалежними. Розрізняють також шуми з конкретними розподілами – рівномірним, нормальним, Пуассона, Коші та іншими.

Означення 2. Білий шум (1) називається стаціонарним, якщо його випадкові величини однаково розподілені з деякою функцією розподілу

$$F(x) = P(\eta_i < x), i \in Z$$

Періодичний білий шум. Ще одним класом шумів є періодичні шуми, які вперше були введені в [1].

Означення 3. Білий шум  $\eta_i, i \in Z$ , називається періодичним білим шумом, якщо періодичною з періодом  $L$  ( $L > 1$ , ціле) є його функція розподілу, тобто

$$F(x; i) = P(\eta_i < x) = F(x; i + L)$$

В пізніших роботах [2, 3] були визначені окремі види періодичних шумів в залежності від того, яким є їх розподіл – неперервними чи дискретними, а також від їх конкретного розподілу. Для прикладу наведемо декілька прикладів.

Приклад 1. Білий шум  $\eta_i, i \in Z$ , називається рівномірним періодичним шумом, якщо його випадкові величини рівномірно розподілені з щільністю розподілу

$$f_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & x \in [a_i, b_i], \\ 0, & x \notin [a_i, b_i]. \end{cases}$$

причому числа  $a_i$  та  $b_i$  утворюють періодичні послідовності з одним і тим же періодом  $L$ :  $a_i = a_{i+L}$ ,  $b_i = b_{i+L}$ ,  $i \in Z$ .

Приклад 2. Білий шум  $\eta_i, i \in Z$ , називається пуассонівським періодичним шумом, якщо для його розподілу  $P(\eta_i = k) = \left( \frac{\lambda_i^k}{k!} \right) e^{-\lambda_i}$  параметр  $\lambda_i$  є періодичним з періодом  $L$ :  $\lambda_i = \lambda_{i+L}$ .

Крім наведених вище періодичних шумів мають місце періодичні шуми з іншими розподілами. Їх класифікацію, проведену в [3], подамо у вигляді таблиці.

Таблиця. Дискретні періодичні білі шуми (п.б.ш.).

| Білі шуми з дискретними розподілами | Білі шуми з неперервними розподілами |                    |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------|
| Бернуллі п.б.ш.                     | рівномірний п.б.ш.                   | $\chi^2$ п.б.ш.    |
| біноміальний п.б.ш.                 | трикутний п.б.ш.                     | $\chi$ п.б.ш.      |
| геометричний п.б.ш.                 | показниковий п.б.ш.                  | Стюдента п.б.ш.    |
| Пуассона п.б.ш.                     | нормальний п.б.ш.                    | $F$ п.б.ш.         |
| логарифмічний п.б.ш.                | гама п.б.ш.                          | логістичний п.б.ш. |

Періодичні послідовності ковзного середнього і авторегресії. Крім самостійного значення періодичні білі шуми є джерелом виникнення періодичності для послідовностей ковзного середнього і авторегресії. В [3, 4] сформульовані і доведені ряд теорем. Наведемо лише дві із них.

Теорема 1. Якщо для послідовності ковзного середнього

$$\xi_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \eta_{i-k}, i \in Z, \quad (2)$$

її породжуючий білий шум  $\eta_i, i \in Z$ , є періодичним з періодом  $L$ , то періодичною є послідовність (2) з цим же періодом.

Теорема 2. Якщо для послідовності авторегресії першого порядку

$$\xi_i = \rho \xi_{i-1} + \eta_i, |\rho| < 1. \quad (3)$$

її породжуючий білий шум  $\eta_i, i \in Z$ , є періодичним з періодом  $L$ , то авторегресія є періодична з цим же періодом.

Зауваження 1. Послідовності ковзного середнього і авторегресії є конструктивними моделями. Тому на відміну від періодично корельованих чи періодичних послідовностей, які є описовими моделями і тільки постулюють періодичність, періодичні послідовності ковзного середнього і авторегресії ще вказують на механізм їх утворення, що використовується в прикладних дослідженнях.

Зауваження 2. Для дослідження послідовностей (2) і (3) можуть бути використані методи статистичного аналізу періодично корельованих чи періодичних послідовностей.

### III. ВИСНОВКИ

Наведено означення дискретного періодичного білого шуму та визначені білі шуми з конкретними розподілами, проведена класифікація таких шумів. Як приклад подані визначення рівномірного та пуассонівського періодичних шумів. Сформульовано теореми, згідно яких послідовності ковзного середнього і авторегресії при дії періодичного шуму є періодичними. Отримані результати відкривають перспективні напрямки дослідження реальних періодичних шумів та послідовностей ковзного середнього і авторегресії, які використовуються при обґрунтуванні конструктивних моделей дискретних стохастично періодичних сигналів.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Приймак Н.В. Оценка периода корреляции и ее использование при исследовании стохастически периодических радиотехнических сигналов. Автореф. дис. канд. техн. наук. 05.12.01. М.: МЭИ, 1987. 18 с.
- [2] Приймак М.В. Дискретні періодичні білі шуми з неперервними розподілами // Праці Ін-ту електродинаміки. Електроенергетика. Київ: ІЕД НАН України, 1999. С. 15-19.
- [3] Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис...докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. 34 с.
- [4] Приймак М.В. Послідовності ковзного середнього при дії періодичного білого шуму // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. 1999. Том 4, число 2. С. 11-15.