

Періодичні білі шуми з неперервним аргументом та їх використання при обґрунтуванні моделей стохастично періодичних сигналів

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.099>

Микола Приймак
Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя.
м. Тернопіль, Україна.
pmw.ukr@ukr.net

Анотація—Із множини процесів з незалежними приростами виділено процеси з незалежними періодичними приростами та наведено визначення періодичного білого шуму з неперервним аргументом. В свою чергу із процесів з незалежними періодичними приростами виділені вінеровський і пуассонівський процеси з періодичними приростами та введено означення вінеровського та пуассонівського білих шумів. Доведено теорему, згідно якої лінійний процес, породжуваний процесом якого є періодичним білим шумом, є періодичним. Отримані результати успішно використані при побудові моделі та оцінці періодичних математичного сподівання і дисперсії стохастично періодичних енергонавантажень.

Ключові слова — процеси з незалежними періодичним приростами; періодичні білі шуми; вінеровський і пуассонівський періодичні шуми; лінійний періодичний процес.

I. ВСТУП

Одним із класів випадкових процесів є білі шуми з неперервним аргументом. Із цієї множини виділені стаціонарними шуми в рамках перших двох моментних функцій. Водночас в прикладних дослідженнях доволі часто зустрічаються стохастично періодичні шуми. Такі шуми теж мають самостійне значення, а також є причиною виникнення стохастичної періодичності різноманітних сигналів і явищ, проте їх вивченню приділяється менше уваги в порівнянні із стаціонарними шумами. Враховуючи це, актуальною є потреба визначити модель стохастично періодичних шумів; вияснити механізм, яким чином ці шуми генерують стохастичну періодичність реальних сигналів та розробити алгоритми їх дослідження.

II. РЕЗУЛЬТАТИ

Процеси з незалежними періодичними приростами. Періодичні білі шуми. Важливим кроком у вивченні моделей стохастично періодичних шумів стала робота [1], де вперше було визначено випадкові процеси з незалежними

періодичними приростами в широкому розумінні та відповідні періодичні білі шуми. Пізніше в [2,3] було виділені процеси з незалежними періодичними приростами та періодичні білі шуми у вузькому розумінні. Останній варіант розглянемо більш детально.

Означення 1. Випадковий процес з незалежними приростами $\eta(t), t \in (-\infty, \infty)$, будемо називати процесом з незалежними періодичними приростами з періодом T , якщо періодичною по t є функція розподілу приросту $\Delta_h \eta(t) = \eta(t+h) - \eta(t)$ (диференціалу $d\eta(t)$):

$$F_{\Delta_h}(x; t) = P(\Delta_h \eta(t) < x) = P(\Delta_h \eta(t+T) < x) = F_{\Delta_h}(x; t+T)$$

Враховуючи, що частинними випадками процесів з незалежними приростами є вінеровський і пуассонівський процеси, в [2, 3] визначені окремі класи процесів які враховують періодичність.

Означення 2. Періодичним білим шумом (у вузькому розумінні) називається узагальнена похідна від процесу з незалежними періодичними приростами.

Враховуючи, що частинними випадками процесів з незалежними приростами є вінеровський і пуассонівський процеси, в [2, 3] визначені окремі класи процесів які враховують періодичність.

Означення 3. Вінеровський процес $\omega(t)$, прирости якого є періодичними, називається вінеровським процесом з незалежними періодичними приростами.

Означення 4. Пуассонівський процес $\pi(t)$, прирости якого є періодичними, називається пуассонівським процесом з незалежними періодичними приростами.

Означення 3а. Вінеровським (нормальним) періодичним білим шумом називається узагальнена похідна від вінеровського процесу з періодичними приростами.

Означення 4а. Пуассонівським періодичним білим шумом називається узагальнена похідна від пуассонівського процесу з періодичними приростами.

Лінійні випадкові процеси та їх зв'язок з періодичними процесами. Процеси з незалежними періодичними приростами та відповідні періодичні білі шуми крім самостійного значення є також причиною виникнення стохастичної періодичності ряду сигналів, систем тощо. Як приклад, на їх основі із класу лінійних випадкових процесів (ЛВП) виділені лінійні періодичні процеси [3]. Нагадаємо спочатку визначення цих.

Означення 5. Лінійний випадковий процес має зображення у вигляді стохастичного інтегралу

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\tau), t \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

де при кожному фіксованому t не випадкова функція (ядро) $\varphi(\tau, t) \in L_2(-\infty, \infty)$, $\eta(\tau)$ – випадковий процес з незалежними приростами (породжуючий процес), який може бути однорідним або неоднорідним.

ЛВП (1) має чітку фізичну інтерпретацію: його можна трактувати як відгук нестационарної (стаціонарної, якщо $\varphi(\tau, t) = \varphi(t - \tau)$) лінійної системи на дію білого шуму – узагальненої похідної від породжуючого процесу $\eta(\tau)$, що суттєво використовується при обґрунтуванні моделей сигналів імпульсного характеру, тобто сигналів типу дробового ефекту.

Основні результати щодо взаємозв'язку ЛВП та періодично процесів вперше були отримані в [3]. Наведемо лише одну із теорем, що показує цей зв'язок.

Теорема. Якщо для лінійного процесу

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) d\eta(\tau), t \in (-\infty, \infty) \quad (2)$$

його ядро $\varphi(t - \tau) = \varphi(s) \in L_2(-\infty, \infty)$, а породжуючий процес $\eta(\tau)$ є процесом з незалежними періодичними приростами, то процес (2) буде періодичним (за Слуцьким).

Використавши форму запису процесу (2) у вигляді

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) \eta'(\tau) d\tau,$$

де $\eta'(\tau)$ – узагальнена похідна від процесу з

незалежними періодичними приростами, результат теореми можна інтерпретувати наступним чином. Якщо на лінійну стаціонарну систему надходить періодичний білий шум, то на виході такої системи процес буде періодичним.

Наведена теорема та інші близькі до неї теореми використовуються в задачах побудови моделей ряду стохастично періодичних сигналів імпульсного характеру. Так в [3] у вигляді лінійного періодичного процесу обґрунтована модель стохастично періодичних енергонавантажень, побудовані оцінки їх періодичних математичного сподівання і дисперсії.

III. ВИСНОВКИ

Із множини процесів з незалежними приростами виділено процеси з незалежними періодичними приростами та наведено визначення періодичного білого шуму з неперервним аргументом. В свою чергу із процесів з незалежними періодичними приростами виділені вінеровський і пуассонівський процеси з періодичними приростами та введено означення вінеровського та пуассонівського білих шумів. Доведено теорему, згідно якої лінійний процес, породжуючий процес якого є періодичним білим шумом, є періодичним. Отримані результати успішно використані при побудові моделі та оцінці періодичних математичного сподівання і дисперсії стохастично періодичних енергонавантажень.

Список використаних джерел

- [1] Драган Я.П., Приймак Н.В. Линейные периодически коррелированные случайные процессы. – Львов, 1986. – 30 с. – (Препр. / АН УССР. Физико-механический ин-т, №120).
- [2] Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип. 10(86). – С. 22-27.
- [3] Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис...докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.