

Математичне моделювання та прогнозування керованих рухів поверхневих та підземних вод

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.092>

Андрій Бомба

Національний університет водного господарства та природокористування
Рівне, Україна
a.ya.bomba@nuwm.edu.ua

Сергій Каштан

Національний університет водного господарства та природокористування
Рівне, Україна
s.s.kashtan@nuwm.edu.ua

Анотація — Методи комплексного аналізу застосовано до дослідження керованих рухів поверхневих та підземних вод у гідрологічних системах (водних об'єктах, наприклад, річках з притоками), обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Повільні, близькі до ідеальних, рухи водних мас пропонується описувати за допомогою аналогів закону Дарсі, враховуючи як поверхневі так і підземні води, вплив яких моделюється як джерела поперечних збурень базового стоку. Методологія моделювання таких процесів базується на розвитку та адаптації числових методів комплексного аналізу, зокрема на переході до обернених крайових задачах на конформні відображення. Це дозволяє моделювати структуру течії; знаходити функцію течії та комплексний потенціал; розраховувати витрати, перетоки, поле швидкості; будувати гідродинамічну сітку руху; приймати рішення щодо керування водними ресурсами. Такий підхід відкриває можливість створення інтелектуальних систем прогнозування гідрологічного режиму водного об'єкту.

Ключові слова — математичне моделювання, керування, числові методи, інтелектуальні системи, цифрові двійники, машинне навчання, нелінійні крайові задачі, конформні відображення, основний потік водних мас, джерело збурень

1. ВСТУП

Гідрологічні системи на сьогодні є дуже активною галуззю досліджень. До факторів, які сприяють цьому, зокрема, відносять: зростаючу в останні десятиліття мінливість, спричинену зміною гідрокліматичних умов [1]; частоту та інтенсивність екстремальних явищ, які посилюються зі зміною клімату [2]; зростаючий вплив людини на водні ресурси, що призводить до збільшення потреб у воді та енергії в глобальному масштабі [3].

У дослідженні [4] підкреслено, що управління водними ресурсами набуває критичного значення в умовах зростаючої гідрокліматичної мінливості та інтенсивного антропогенного навантаження. Сучасна інженерна гідравліка та гідрогеоекологія пріоритетно спрямовані на забезпечення стійкого розвитку та впровадження адаптивного управління.

Керовані рухи води, що включають регулювання стоку, мінімізацію паводкових ризиків та оптимізацію інфільтраційного живлення, вимагають відходу від статичних інженерних оцінок на користь динамічних прогностичних моделей, здатних працювати в режимі реального часу [4].

Математичне моделювання надає можливість проаналізувати характер процесів, які впливають на стан водного об'єкту, передбачити їхній розвиток у майбутньому, що є важливим під час прийняття управлінських рішень. У багатьох випадках практики формули для знаходження характеристик середовища потребують задання функції швидкості. В реальних фізичних задачах, зокрема в задачах гідрології, фільтрації, часто це зробити або неможливо, або дуже складно. Математичне моделювання гідравлічних процесів є невід'ємною частиною сучасних гідрологічних досліджень водних об'єктів та дозволяє ефективно емулювати відповідні процеси, зокрема, за допомогою сурогатних моделей на основі методів машинного навчання [5].

У цій роботі започатковано вивчення зазначеної проблеми і запропоновано вплив як поверхневих так і підземних вод, що живлять основну течію (наприклад, притоки до водойми, скиди у водойму) або живляться за рахунок основної течії (наприклад, водозабірні насоси, стоки підземних/грунтових вод), на початковому етапі моделювати як ділянки (джерела) поперечних збурень базового стоку [6].

У роботах [7 – 9] широко використано метод обернених крайових задач (конформних відображень) для побудови гідродинамічної сітки потенційних та квазіпотенційних полів різних процесів та поля швидкості з паралельним розрахунком різних інших характеристик (витрат, величин перетоків тощо). Як відомо [9], за допомогою введення функції течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряженої до шуканого потенціалу $\varphi = \varphi(x, y)$, задачі в областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, зводяться до конформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області на

відповідну область комплексного потенціалу – внутрішність многокутника з вертикальними та горизонтальними ділянками його границі.

II. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається водний об'єкт – водойма (зокрема, річка) з притоками, як однозв'язна криволінійна чотирикутна область G_z ($z=x+iy$), обмежена чотирма гладкими кривими $AB=\{z: f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{z: f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{z: f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{z: f_4(x,y)=0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, за таких умов:

$\varphi|_{AB}=\varphi_*$, $\varphi|_{CD}=\varphi^*$, $\frac{d\varphi}{dn}\Big|_{L_n^*}=\frac{d\varphi}{dn}\Big|_{L_n^*}=0$, де $\vec{n}$ – нормаль до відповідної кривої,

$$L_n^*=BC\setminus\bigcup_{k=0}^s M_{2k+1}N_{2k+1}, L_n^*=AD\setminus\bigcup_{k=1}^r M_{2k}N_{2k}.$$

Оскільки течію вважаємо ідеальною, то, як відомо [9], швидкість руху можемо описати законами $\vec{v}=\text{grad } \varphi(x,y)$, $\text{div } \vec{v}=0$. А ділянки $M_k N_k$ впадання приток на лівому ($k=1,3,\dots,2s+1$) та правому ($k=2,\dots,2r$) берегах ототожнюються з джерелами збурень вихідного потоку водних мас вздовж граничних ліній BC та AD основної течії відповідно (рис. 1). Причому, притік до русла можна розглядати як гідралічний, так і фільтраційний, а потенціал φ можна визначити через напір та гідралічну провідність або коефіцієнт фільтрації відповідно (для зручності викладок вважатимемо, що ці коефіцієнти дорівнюють одиниці).

Нехай на цих ділянках (притоках) $M_k N_k$ маємо

потенціали $\varphi|_{M_k N_k}=\varphi_k^\circ$, причому $\varphi_* < \varphi_k^\circ < \varphi^*$.

Залежно від їхніх значень та співвідношень між ними можливі різні випадки формування структури течії у фізичній області G_z (водному об'єкті), які, зокрема, характеризуються положенням ліній розділу ділянок потоків водних мас, що при цьому утворюються [6–9].

Аналогічно до [6, 9], задача полягає у знаходженні характеристичної функції течії, що забезпечує можливість паралельного знаходження комплексного потенціалу, повної витрати потоку, величин різних перетоків, побудови у розглядуваній області гідродинамічної сітки руху та кривих розділу водних мас, розрахунку поля швидкості руху.

Розглядається один з можливих випадків [6] формування структури течії у водному об'єкті – області G_z , а саме ключовий випадок, коли $\varphi_* < \varphi_1^\circ < \varphi_3^\circ < \varphi^*$ за компенсаційної умови $K=M_3$, при цьому область комплексного потенціалу G_ω матиме вигляд, наведений на рис.2.

III. ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА

Обернена нелінійна крайова задача на конформне відображення області G_ω на область G_z для невідомих $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q$ у диференціальній формі запишеться у вигляді [6]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \psi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \end{aligned} \right. \quad (1)$$

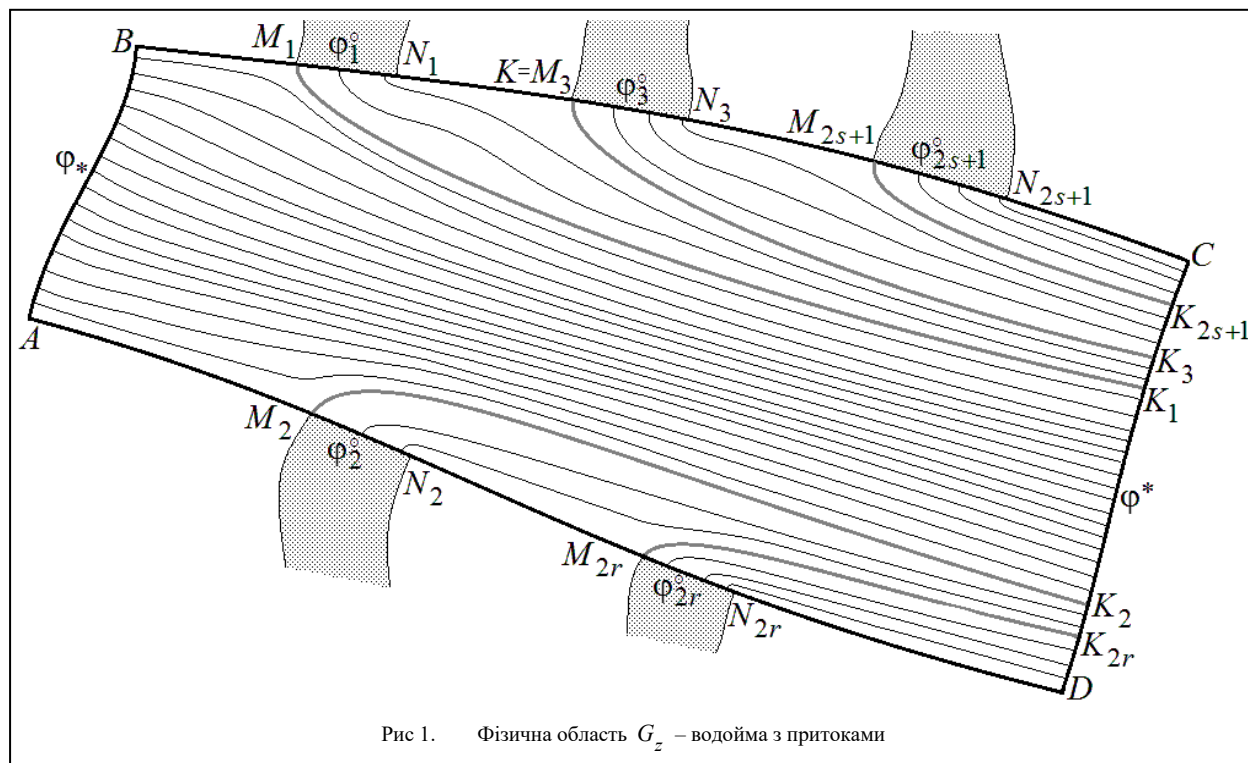
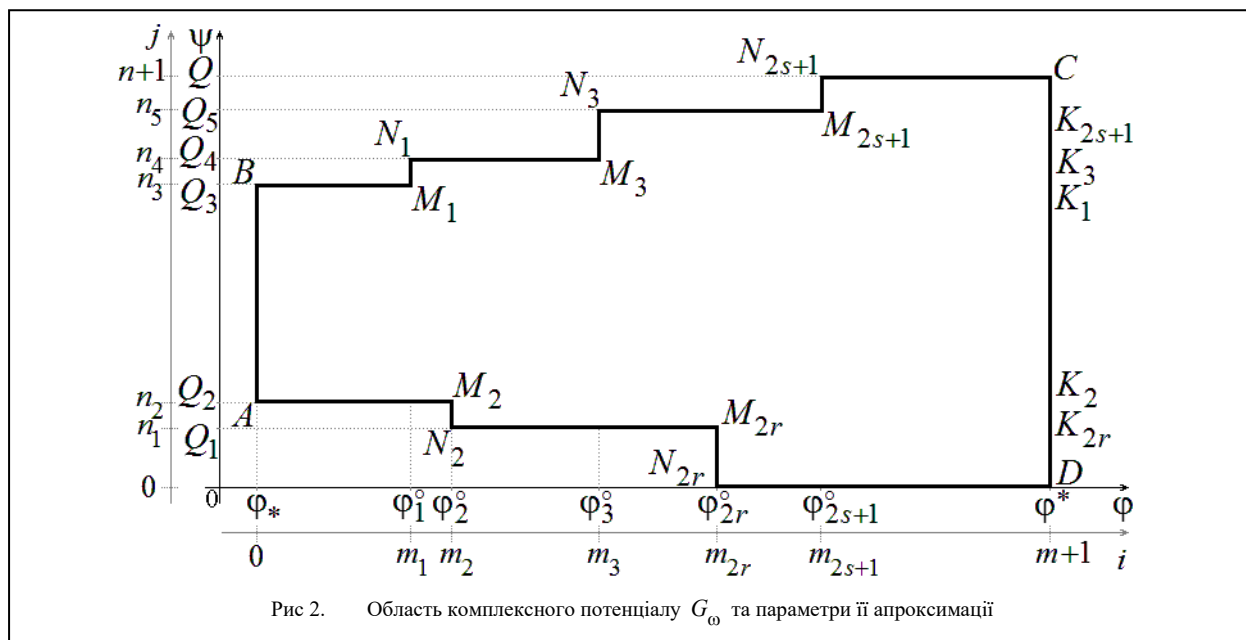


Рис 1. Фізична область G_z – водойма з притоками



$$\begin{cases}
 f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi))=0, & Q_2 \leq \psi \leq Q_3, \\
 f_2(x(\varphi, Q_3), y(\varphi, Q_3))=0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_1^o, \\
 f_2(x(\varphi_1^o, \psi), y(\varphi_1^o, \psi))=0, & Q_3 \leq \psi \leq Q_4, \\
 f_2(x(\varphi, Q_4), y(\varphi, Q_4))=0, & \varphi_1^o \leq \varphi \leq \varphi_3^o, \\
 f_2(x(\varphi_3^o, \psi), y(\varphi_3^o, \psi))=0, & Q_4 \leq \psi \leq Q_5, \\
 f_2(x(\varphi, Q_5), y(\varphi, Q_5))=0, & \varphi_3^o \leq \varphi \leq \varphi_{2s+1}^o, \\
 f_2(x(\varphi_{2s+1}^o, \psi), y(\varphi_{2s+1}^o, \psi))=0, & Q_5 \leq \psi \leq Q, \\
 f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q))=0, & \varphi_{2s+1}^o \leq \varphi \leq \varphi^*, \\
 f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi))=0, & Q \geq \psi \geq 0, \\
 f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0))=0, & \varphi^* \geq \varphi \geq \varphi_{2r}^o, \\
 f_4(x(\varphi_{2r}^o, \psi), y(\varphi_{2r}^o, \psi))=0, & 0 \leq \psi \leq Q_1, \\
 f_4(x(\varphi, Q_1), y(\varphi, Q_1))=0, & \varphi_{2r}^o \geq \varphi \geq \varphi_2^o, \\
 f_4(x(\varphi_2^o, \psi), y(\varphi_2^o, \psi))=0, & Q_1 \leq \psi \leq Q_2, \\
 f_4(x(\varphi, Q_2), y(\varphi, Q_2))=0, & \varphi_2^o \geq \varphi \geq \varphi_*,
 \end{cases} \quad (2)$$

де Q – сумарний потік, що виходить із області G_z через ділянку границі CD , а $Q_1, Q_2-Q_1, Q_3-Q_2, Q_4-Q_3, Q_5-Q_4, Q-Q_5$ – величини потоків, що входять в область G_z через ділянки $M_{2r}N_{2r}, M_2N_2, AB, M_1N_1, M_3N_3, M_{2s+1}N_{2s+1}$ відповідно.

Задача (1), (2) зводиться до задачі відшукування розв'язку рівнянь Лапласа в області G_ω за нелінійних крайових умов (2) та умов Коші–Рімана (1) на границі області G_ω .

Наближений розв'язок цієї задачі отримується як розв'язок різницевого аналогу задачі (1), (2) у відповідній нерівномірній сітковій області

комплексного потенціалу за допомогою алгоритму, побудованого на основі [6, 9], який ґрунтується на почерговій параметризації величин конформних інваріантів, граничних і внутрішніх вузлів сіткової області G_z з використанням ідей методу блочної ітерації [10].

ВИСНОВКИ

Керовані рухи поверхневих та підземних вод є складною кіберфізичною задачею, де прогностична точність моделей та обчислювальна ефективність алгоритмів взаємодіють з фундаментальними законами гідродинаміки для забезпечення стійкості та надійності водогосподарських систем.

На основі модифікованого числового методу комплексного аналізу розв'язання конкретних типів задач на конформні відображення областей комплексного потенціалу (з вертикальними та горизонтальними розрізами) на відповідні фізичні області з криволінійними ділянками границі (лініями течії та еквіпотенціальними лініями), побудовано алгоритм, що дозволяє знаходити потенціали та характеристичну функцію течії, а отже і поля швидкості руху, будувати лінії розділу течії та гідродинамічну сітку руху, обчислювати різні інтегральні параметри (перетоки, витрати тощо), передбачати наслідки певних видів катастроф (зокрема, підтоплень). Розроблений підхід також дозволяє ширше аналізувати гідрологічні процеси, планувати водогосподарську та гідротехнічну інфраструктуру, прогнозувати ризики та приймати відповідні обґрунтовані рішення щодо водокористування, управління водними системами та захисту екосистеми водного об'єкту.

Напрямом майбутніх досліджень може бути узагальнення запропонованого підходу до вивчення більш глобальних процесів руху поверхневих і підземних вод, його поширення на випадки неоднорідних, анізотропних, схильних до деформацій середовищ, зокрема, басейнів річок та морів з урахуванням взаємодії підземних ґрунтових вод і поверхневих водних мас.

Також, перспективним напрямом досліджень гідрологічних систем є гідроінформатика та цифрові двійники. Технологія цифрових двійників є інтеграційною платформою, що дозволяє поєднати математичне моделювання фізичного процесу, високопродуктивні обчислювальні технології та машинне навчання для подолання обмежень оперативного управління процесом. У контексті цього дослідження технологія цифрових двійників інтегрує математичні моделі, що описують поведінку системи (такі як закон А.Дарсі та рівняння нерозривності); високопродуктивні обчислювальні технології, що забезпечують обмін даними між фізичним і віртуальним світом; дані моніторингу реальних гідрологічних систем (річка, водосховище, водоносний горизонт) та прогностичні моделі машинного навчання, як аналітичний інструмент для обробки даних і надання рекомендацій. Реалізація цифрового двійника дозволяє розробляти математичні та цифрові моделі гідрологічної системи, програмувати її поведінку та забезпечувати людино-машинну взаємодію між водним об'єктом та його моделлю.

Таким чином, технологія цифрових двійників перетворює математичне моделювання з інструменту прогнозування на інструмент операційної безпеки та стійкості. Це має вирішальне значення в гідравлічних системах, де помилки можуть призвести до певних видів катастроф, наприклад, руйнування гідропоруд та/або появи паводків.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] V. Sreeparvathy, and V. V. Srinivas, "Global assessment of spatiotemporal variability of wet, normal and dry conditions using multiscale entropy-based approach," *Scientific Reports*, Volume 12, Issue 1, Article 9767, 2022, DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-022-13830-w>.
- [2] S. Stevenson, S. Coats, D. Touma, J. Cole, F. Lehner, J. Fasullo, and B. Otto-Bliesner, "Twenty-first century hydroclimate: A continually changing baseline, with more frequent extremes," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Volume 119, Issue 12, Article e2108124119, 2022, DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.2108124119>.
- [3] A. Boretti, and L. Rosa, "Reassessing the projections of the World Water Development Report," *npj Clean Water*, Volume 2, Article 15, 2019, DOI: <https://doi.org/10.1038/s41545-019-0039-9>.
- [4] A. Castelletti, A. Ficchi, A. Cominola, P. Segovia, M. Giuliani, W. Wu, S. Lucia, C. Ocampo-Martinez, B. D. Schutter, and J. M. Maestre, "Model Predictive Control of water resources systems: A review and research agenda," *Annual Reviews in Control*, Volume 55, pp. 442-465, 2023, URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578823000172>, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2023.03.013>.
- [5] R. Huang, C. Ma, J. Ma, X. Huangfu, and Q. He, "Machine learning in natural and engineered water systems," *Water Research*, Volume 205, Article 117666, 2021, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.watres.2021.117666>.
- [6] А. Я. Бомба, С. С. Каштан, "Методи комплексного аналізу прогнозування керованих рухів поверхневих та фільтраційних вод," *Кібернетика та системний аналіз*, Т.61, №5, с.39-54, 2025, DOI: <https://doi.org/10.34229/KCA2522-9664.25.5.4>.
- [7] А. Я. Бомба, С. С. Каштан, "Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення з потенціалом керування," *Математичні методи та фізико-механічні поля*, Т. 45, № 3, с. 69-76, 2002, URL: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/2925>.
- [8] A. Y. Bomba, S. S. Kashtan, and V. V. Skopetskii, "Nonlinear inverse boundary-value problems of conformal mapping with a controlling potential," *Cybernetics and Systems Analysis*, Volume 40, Issue 1, pp. 58-65, 2004, DOI: <https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000028100.70341.57>.
- [9] А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак, "Методи комплексного аналізу," *Рівне: НУВГП*, 2013.
- [10] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, "Iterative solution of nonlinear equations in several variables," New York, London: Academic Press, 1970, DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11263-9>.