

Про вплив інтегральних умов спряження на просідання поверхні пористого середовища в умовах його неізотермічної консолідації: математична модель та схема її числового розв'язання

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.103>

Оксана Уляничук-Мартинюк
Національний університет водного господарства
та природокористування,
м. Рівне, Україна
o.v.ulianchukmartyniuk@nuwm.edu.ua

Анотація - Сформовано математичну модель неізотермічної фільтраційної консолідації неоднорідного масиву ґрунту з урахуванням зміни розмірів області в процесі ущільнення. Неоднорідність в роботі розглянуто з точки зору наявності тонких включень (геобар'єрів), фізико-механічні характеристики яких відрізняються від аналогічних характеристик основного ґрунту. Геобар'єри, які піддаються впливу неізотермічних умов, є складовою частиною сховищ відходів. Зміна їх (геобар'єрів) гідромеханічних та термічних властивостей, так само як і явища термічного осмосу, вимагає модифікації як рівнянь в математичній моделі, так і умов спряження. З математичної точки зору сформована математична модель описується однофазною задачею Стефана і своєю складовою містить кінематичну граничну умову на верхній рухомій межі. Зміна розмірів області дослідження в задачі фізично обумовлюється зміною об'єму пор пористого середовища в процесі розсіювання надлишкових напорів. Якщо проникність геобар'єра є нелінійно залежною від температурного фактору, то це впливає на динаміку консолідаційних процесів і, відповідно, - на значення просідань. Запропоновано схеми скінченноелементних розв'язків початково-крайової задачі для системи нелінійних параболічних рівнянь в неоднорідній області з інтегральною умовою спряження.

Ключові слова - неізотермічна консолідація, просідання, умова спряження, кінематична гранична умова, метод скінченних елементів

I. ВСТУП

Звалища відходів стали невід'ємними елементами життєдіяльності людей на планеті Земля [1]. Одним із інженерних елементів сховищ відходів є геобар'єри [2]. В результаті біодеградаційних процесів в сховищах відходів відбувається виділення теплової енергії [3, 4]. Тому постає необхідність урахування неізотермічних впливів як на консолідацію пористого середовища тіла сховища

відходів, так і на фільтраційні характеристики геобар'єрів.

Одне з основних питань впливу сховищ відходів на навколишнє середовище – це поширення шкідливих речовин шляхом їх фільтрації через геобар'єри в навколишнє середовище. Тому фактори, які впливають на параметри фільтрації через геобар'єри мають бути прийняті до уваги в прогностичних математичних моделях. З математичної точки зору існуючий факт теплового впливу вимагає модифікації умов спряження на тонких геобар'єрах з урахуванням неізотермічних та взаємопов'язаних нелінійних ефектів. Такі модифікації наведені наприклад в роботах [5-11].

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ У ФІЗИЧНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянемо масив пористого середовища загальною товщиною $l = l(t)$, який складається із двох підобластей Ω_1 та Ω_2 . Причому $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ вважаємо неоднорідною. Під неоднорідністю будемо розуміти наявність межі контакту $\omega = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$, яка, з фізичної точки зору, є тонким включенням товщиною d третього матеріалу. З математичної точки зору товщиною самого включення нехтують і сама величина d фігурує лише в так званих умовах спряження неідеального контакту для невідомих функцій.

Дослідимо процес консолідації даного повністю насиченого пористого середовища в області $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ в умовах впливу температурного фактору. Це означає, що неоднорідний шар ґрунту – це основа сховища відходів, а тонке включення – це геобар'єр. Консолідація ґрунту є наслідком прикладання зовнішнього навантаження у вигляді твердих відходів у сховищі. В результаті хімічних реакцій у

сховищі відбувається виділення теплової енергії. Отже, невідомими будуть функції напорів $h(x, t)$ та температури $T(x, t)$, $x \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $t \geq 0$.

III. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ В ОБЛАСТІ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Взаємозв'язаний процес зміни напорів та температури повністю насиченого неоднорідного масиву пористого середовища в одновимірному випадку описується наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1+e}{\gamma a} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(h, T) \frac{\partial h}{\partial x} + \mu(h) \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

$$x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, \quad (1)$$

$$h(x, t)|_{x=0} = \bar{h}_0(t), t \geq 0; \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{x=l} = \left(-k(h, T) \frac{\partial h}{\partial x} - \mu(h) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=l(t)} = 0,$$

$$t \geq 0; \quad (3)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2; \quad (4)$$

$$c_s(h) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(h) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho_w c_w u(h, T) \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0; \quad (5)$$

$$T(x, t)|_{x=0} = \bar{T}_0(t), t \geq 0; \quad (6)$$

$$q_T(x, t)|_{x=l} = -\lambda(h) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l(t)} = 0, t \geq 0; \quad (7)$$

$$T(x, 0) = T_0(x), x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2; \quad (8)$$

$$u^\pm|_{x=\xi} = -\frac{[h]}{\int_0^a \frac{dx}{k_\omega(h, T)}} - \frac{[T]}{\int_0^a \frac{dx}{\mu_\omega(h)}}; \quad (9)$$

$$q_T^\pm|_{x=\xi} = -\frac{[T]}{\int_0^a \frac{dx}{\lambda_\omega(h)}}; \quad (10)$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = -\int_0^{l(t)} \frac{\partial u}{\partial x} dz; \quad (11)$$

$$l(t)|_{t=0} = l_0 > 0. \quad (12)$$

Тут: $\Omega_1 = (0; \xi)$, $\Omega_2 = (\xi; l)$, $0 < \xi < l(t)$; $\bar{h}_0(t)$, $h_0(x)$, $\bar{T}_0(t)$, $T_0(x)$, - відомі функції; a - коефіцієнт стискуваності ґрунту; h - напір; k , k_ω - коефіцієнти фільтрації основного ґрунту та ґрунту включення відповідно; λ , λ_ω - коефіцієнти теплопровідності основного ґрунту та ґрунту включення відповідно; μ , μ_ω - коефіцієнти термічного осмосу основного ґрунту та ґрунту включення відповідно; u - швидкість фільтрації; e - коефіцієнт пористості ґрунту, причому $e = \frac{\sigma}{1-\sigma}$, де σ - пористість ґрунту; q_T - потік теплової енергії; $u^\pm, q_T^\pm$ - значення швидкостей фільтрації та потоків при $x = \xi - 0$ та $x = \xi + 0$ відповідно; $[h] = h^+ - h^-$, $[T] = T^+ - T^-$

- стрибки напорів та температури на тонкому включенні; $c_s = \rho_w c_w \sigma + \rho_{solid} c_{solid} (1 - \sigma)$ - коефіцієнт об'ємної теплоємності ґрунту; ρ_w, ρ_{solid} - густини порової рідини та твердих частинок ґрунту; c_w, c_{solid} - питомі теплоємності порової рідини та твердих частинок ґрунту.

Рівняння (1) є рівнянням фільтраційної консолідації в умовах впливу температури та наявності термоосмотичних ефектів [12, 13]. Умови спряження (9), (10) відрізняються від класичних і враховують залежності коефіцієнта фільтрації геобар'єра від пористості та температури, наявність термічного осмосу, а також залежності коефіцієнта теплопровідності від пористості.

Аналогічно [6], нехай H_0 - простір функцій $s(x)$ які на кожній з областей Ω_i належать простору Соболева $W_2^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, причому задовольняють умову

$$s(x)|_{x=0} = 0.$$

Нехай $h(x, t)$, $T(x, t)$ - класичний розв'язок початково-крайової задачі (1)-(12). Візьмемо $s(x) \in H_0$. Домножимо рівняння (1) та початкову умову (4) на $s(x)$. Аналогічно - рівняння (5) та початкову умову (8). Інтегруючи їх на відрізьку $[0; l]$ та враховуючи умови спряження (9), (10), отримаємо

$$\int_0^l \frac{\gamma a}{1+e} \frac{\partial h}{\partial t} s(x) dx + \int_0^l k(h, T) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^l \mu(h) \frac{\partial T}{\partial x} \frac{ds}{dx} dx + \frac{[h][s]}{\int_0^a \frac{dx}{k_\omega(h, T)}} + \frac{[T][s]}{\int_0^a \frac{dx}{\mu_\omega(h)}} = 0, \quad (13)$$

$$\int_0^l h(x, 0) s(x) dx = \int_0^l h_0(x) s(x) dx, \quad (14)$$

$$\int_0^l c_s \frac{\partial T}{\partial t} s(x) dx + \int_0^l \lambda(h) \frac{\partial T}{\partial x} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^l \rho_w c_w u \frac{\partial T}{\partial x} s(x) dx + \frac{[T][s]}{\int_0^a \frac{dx}{\lambda_\omega(h)}} = 0, \quad (15)$$

$$\int_0^l h(x, 0) s(x) dx = \int_0^l h_0(x) s(x) dx. \quad (16)$$

Отже, якщо $h(x, t)$, $T(x, t)$ є класичним розв'язком початково-крайової задачі (1)-(12), то $h(x, t)$, $T(x, t)$ - розв'язок задачі (13)-(16) в слабкій постановці.

Нехай H - простір функцій $v(x, t)$ які інтегровані з квадратом разом зі своїми першими похідними $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ на кожному з інтервалів $(0; \xi)$, $(\xi; l)$, $\forall t \in (0; T]$, $T > 0$, причому вони задовольняють однорідні граничні умови першого роду

$$v(x, t)|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0.$$

Означення 1. Функції $h(x, t) \in H$, $T(x, t) \in H$, котрі для будь-якої $s(x) \in H_0$ задовольняють інтегральним співвідношенням (13)-(16) називаються узагальненим розв'язком початково-крайової задачі (1)-(12).

VI. НАБЛИЖЕНИЙ УЗАГАЛЬНЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК: ЙОГО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ

Наближений узагальнений розв'язок початково-крайової задачі (1)-(12) будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{h}(x, t) &= \sum_{i=1}^N h_i(t) \varphi_i(x), \\ \hat{T}(x, t) &= \sum_{i=1}^N T_i(t) \varphi_i(x), \end{aligned} \quad (17)$$

де $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ - базис скінченновимірному підпростору $M_0 \subset H_0$; $h_i(t)$, $T_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ - невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу.

Сукупність функцій, які можна подати у вигляді (17), породжують скінченновимірний підпростір $M \subset H$.

Означення 2. Наближеним узагальненим розв'язком початково-крайової задачі (1)-(12) називається пара функцій $\hat{h}(x, t) \in M$, $\hat{T}(x, t) \in M$ які для довільної функції $S(x) \in M_0$ задовольняють інтегральним співвідношенням

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\gamma a}{1+e} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} S(x) dx + \int_0^l k(\hat{h}, \hat{T}) \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \frac{dS}{dx} dx \\ + \int_0^l \mu(\hat{h}) \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \frac{dS}{dx} dx + \frac{[\hat{h}][S]}{\int_0^a \frac{dx}{k_\omega(\hat{h}, \hat{T})}} \\ + \frac{[\hat{T}][S]}{\int_0^a \frac{dx}{\mu_\omega(\hat{h})}} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \hat{h}(x, 0) S(x) dx &= \int_0^l h_0(x) S(x) dx, \quad (19) \\ \int_0^l c_s \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S(x) dx + \int_0^l \lambda(\hat{h}) \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \frac{dS}{dx} dx \\ + \int_0^l \rho_w c_w u \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} S(x) dx + \frac{[\hat{T}][S]}{\int_0^a \frac{dx}{\lambda_\omega(\hat{h})}} \\ &= 0, \quad (20) \\ \int_0^l \hat{T}(x, 0) S(x) dx &= \int_0^l T_0(x) S(x) dx. \quad (21) \end{aligned}$$

Далі із слабого формулювання (18)–(21) задачі (1)–(12), враховуючи (17) (покладаючи функцію $S(x)$ рівною кожній базисній функції $\varphi_i(x)$, $i =$

$\overline{1, N}$), отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{H}) \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \mathbf{L}_1(\mathbf{H}, \mathbf{T})\mathbf{H}(t) + \mathbf{L}_{12}(\mathbf{H})\mathbf{T}(t) = \mathbf{0}, \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 \mathbf{H}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}_1, \quad (23)$$

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{H}) \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}_2(\mathbf{H}, \mathbf{T})\mathbf{T}(t) = \mathbf{0}, \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}_2, \quad (25)$$

Де

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_k &= (\tilde{f}_i^{(k)})_{i=1}^N, \quad \tilde{\mathbf{M}}_k = (\tilde{m}_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{M}_k = (m_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^N, \\ \mathbf{L}_k &= (l_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^N, \quad k = 1, 2; \quad \mathbf{L}_{12} = (l_{ij}^{(12)})_{i,j=1}^N, \quad \tilde{m}_{ij}^{(k)} = \\ &= \int_0^l \varphi_i \varphi_j dx, \quad \tilde{f}_i^{(1)} = \int_0^0 h_0 \varphi_i dx, \quad \tilde{f}_i^{(2)} = \int_0^0 T_0 \varphi_i dx, \quad \mathbf{H} = \\ &= (h_i(t))_{i=1}^N, \quad \mathbf{T} = (T_i(t))_{i=1}^N, \quad \mathbf{H}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^N, \quad \mathbf{T}^{(0)} = \\ &= (T_i(0))_{i=1}^N, \quad m_{ij}^{(1)} = \int_0^l \frac{\gamma a}{1+e} \varphi_i \varphi_j dx, \\ l_{ij}^{(1)} &= \int_0^l k(\hat{h}, \hat{T}) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx + \frac{[\varphi_i][\varphi_j]}{\int_0^a \frac{dx}{k_\omega(\hat{h}, \hat{T})}}, \\ l_{ij}^{(12)} &= \int_0^l \mu(\hat{h}) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx + \frac{[\varphi_i][\varphi_j]}{\int_0^a \frac{dx}{\mu_\omega(\hat{h})}}, \\ m_{ij}^{(2)} &= \int_0^l c_s \varphi_i \varphi_j dx, \\ l_{ij}^{(2)} &= \int_0^l \lambda(\hat{h}) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx + \int_0^l \rho_w c_w u \frac{d\varphi_j}{dx} \varphi_i dx \\ &+ \frac{[\varphi_i][\varphi_j]}{\int_0^a \frac{dx}{\lambda_\omega(\hat{h})}}. \end{aligned}$$

Задача (22)–(25) є задачею Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Відшукування її розв'язку теж вимагає застосування відповідних схем дискретизації. В [6] обґрунтовано застосування схеми Кранка-Ніколсона

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(\mathbf{H}^{(j+1/2)}) \frac{\mathbf{H}^{(j+1)} - \mathbf{H}^{(j)}}{\tau} \\ + \mathbf{L}_1(\mathbf{H}^{(j+1/2)}, \mathbf{T}^{(j+1/2)}) \mathbf{H}^{(j+1/2)} \\ + \mathbf{L}_{12}(\mathbf{H}^{(j+1/2)}) \mathbf{T}^{(j+1/2)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_2(\mathbf{H}^{(j+1/2)}) \frac{\mathbf{T}^{(j+1)} - \mathbf{T}^{(j)}}{\tau} \\ + \mathbf{L}_2(\mathbf{H}^{(j+1/2)}, \mathbf{T}^{(j+1/2)}) \mathbf{T}^{(j+1/2)} \\ = \mathbf{0}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m_\tau - 1. \end{aligned}$$

Тут часовий відрізок $[0, \mathcal{T}]$ розбитий на m_τ рівних частин з кроком $\tau = \frac{\mathcal{T}}{m_\tau}$; $\mathbf{H}^{(j)}$, $\mathbf{T}^{(j)}$ - наближений

розв'язок задачі Коші при $t = j\tau$, $\mathbf{H}^{(j+1/2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^{(j+1)} + \mathbf{H}^{(j)})$, $\mathbf{T}^{(j+1/2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}^{(j+1)} + \mathbf{T}^{(j)})$. Також введемо наступні позначення: $h^{(j)}$, $T^{(j)}$ - класичний розв'язок початково-крайової задачі (1)-(10) при $t = j\tau$; $\hat{h}^{(j)}$, $\hat{T}^{(j)}$ - наближений узагальнений розв'язок початково-крайової задачі (1)-(10) при $t = j\tau$; $\phi^{(j+1/2)} = \frac{1}{2}(\phi^{(j+1)} + \phi^{(j)})$; $z_h^{(j)} = h^{(j)} - \hat{h}^{(j)}$, $z_T^{(j)} = T^{(j)} - \hat{T}^{(j)}$.

Однак практична реалізація схеми Кранка-Ніколсона стосовно нелінійної задачі Коші (22)-(25) вимагає застосування ітерацій. Замість схеми Кранка-Ніколсона можна використати схему предиктор-коректор [6]. З точки зору простоти практичної реалізації добре зарекомендувала себе повністю неявна лінеаризована різницева схема [12, 13].

V. АПРОКСИМАЦІЯ КІНЕМАТИЧНОЇ ГРАНИЧНОЇ УМОВИ

Умова (11) не зручна безпосередньо для числового обрахунку просідань поверхні ґрунту. Тому, аналогічно до [5], в (11) підставимо швидкість фільтрації, визначену згідно закону фільтрації

$$u = -k(h, T) \frac{\partial h}{\partial x} - \mu(h) \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Маємо

$$\frac{dl(t)}{dt} = \int_0^{l(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(h, T) \frac{\partial h}{\partial x} + \mu(h) \frac{\partial T}{\partial x} \right) dz.$$

Далі, використовуючи рівняння (1), з вищенаведеної рівності маємо

$$\frac{dl(t)}{dt} = \int_0^{l(t)} \frac{\gamma a}{1 + e} \frac{\partial h}{\partial t} dz. \quad (26)$$

Застосовуючи до (26) дискретизацію в часі згідно неявної різницевої схеми, отримаємо

$$\frac{l^{(j+1)} - l^{(j)}}{\tau} = \int_0^{l^{(j)}} \frac{\gamma a}{1 + e^{(j+1)}} \frac{h^{(j+1)} - h^{(j)}}{\tau} dz, j = 0, 1, 2, \dots$$

Звідки

$$l^{(j+1)} = l^{(j)} + \int_0^{l^{(j)}} \frac{\gamma a}{1 + e^{(j+1)}} (h^{(j+1)} - h^{(j)}) dz. \quad (27)$$

Тут $l^{(j+1)} = l(t_{j+1})$, $j = 0, 1, 2, \dots$ В (27) положення $l^{(j)}$ є відомим, як власне і значення $h^{(j+1)}$, $e^{(j+1)}$ та $h^{(j)}$. Відмітимо, що значення напорів, згідно алгоритму, на часовому шарі $(j + 1)$ шукаємо, використовуючи положення верхньої межі $l^{(j)}$. Інтеграл в (27) можна знайти, використовуючи формули числового інтегрування.

VI. ВИСНОВКИ

Таким чином, в роботі сформовано математичну модель неізотермічної фільтраційної консолідації неоднорідного масиву ґрунту з урахуванням зміни розмірів області в процесі ущільнення. Запропоновано схеми скінченноелементних розв'язків початково-крайової задачі для системи нелінійних параболічних рівнянь в неоднорідній

області з інтегральною умовою спряження. Наведені теоретичні результати є передумовою для програмної реалізації наведених числових схем та створення відповідного програмного забезпечення з метою прогнозування перебігу досліджуваних процесів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lin Mu, Qiao Wang, Fusheng Zha, Jun Wang, Rumin Xu, Miao Piao (2025). Contaminant transport in a municipal solid waste landfill: On-site assessment and numerical modelling of vertical barrier wall effectiveness, *Waste Management*, Vol.205, 114978, <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2025.114978>.
2. Mishra A., Raviteja KVNS, Das S.K., Reddy K.R. (2024). Assessing the sustainability of composite liner systems for municipal solid waste landfills. *Journal of Environmental Engineering and Science*, 2300067, <https://doi.org/10.1680/jenes.23.00067>.
3. Wang C., Zhang Z., Ma Z., Zhang Y., Zhu H., Lu B., Chen W. (2025). Degradation and Stabilization Degree of Municipal Solid Waste: The Case of Two Landfills in China, *Sustainability*, 17, 307. <https://doi.org/10.3390/su17010307>.
4. Shostak L. V., Martyniuk P. M. (2024). Mathematical modeling of solid municipal waste landfill surface settlement with regard to organic component biodegradation, *Mathematical Modeling and Computing*, Vol. 11, No. 4, pp. 1106–1117. <https://doi.org/10.23939/mmc2024.04.1106>.
5. Martyniuk P. M., Michuta O. R., Ulianchuk-Martyniuk O. V. (2024). Numerical modeling of surface subsidence due to compaction of soil with fine inclusions, *Mathematical Modeling and Computing*, Vol. 11, No. 1, pp. 50–58. <https://doi.org/10.23939/mmc2024.01.050>.
6. Michuta Olha R., Martyniuk Petro M. (2022). Nonlinear Evolutionary Problem of Filtration Consolidation With the Non-Classical Conjugation Condition, *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*, 30(1), pp. 71–87 DOI: <http://dx.doi.org/10.15421/142203>.
7. Ulianchuk-Martyniuk, O. V. (2020). Numerical simulation of the effect of semi-permeable properties of clay on the value of concentration jumps of contaminants in a thin geochemical barrier. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 8(1), 91–104.
8. Ulianchuk-Martyniuk O., Michuta O. (2020). Conjugation conditions in the problem of filtering chemical solutions in the case of structural changes to the material and chemical suffusion in the geobarrier. *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(1), 141–154. <http://dx.doi.org/10.17654/HM019010141>.
9. Ulianchuk-Martyniuk O., Michuta O., Ivanchuk N. (2020). Biocolmatation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(10-106), pp. 18–26. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.210044>.
10. Ulianchuk-Martyniuk O. V., Michuta O. R., Ivanchuk N. V. (2021). Finite element analysis of the diffusion model of the bioclogging of the geobarrier, *Eurasian Journal Of Mathematical and Computer Applications*, Volume 9, Issue 4, 100 – 114.
11. Ulianchuk-Martyniuk, O.V., Michuta, O.R. (2020). Numerical Simulation of the Effect of Chemical Osmosis on the Value of the Jumps of Pollution in the Geochemical Barrier. *International Journal of Applied Mathematics*, 33(6), pp. 1067–1082. <https://doi.org/10.12732/ijam.v33i6.8>.
12. Vlasjuk A.P., Martyniuk P.M. (2010). Numerical solution of three-dimensional problems of filtration consolidation with regard for the influence of technogenic factors by the method of radial basis functions. *J Math Sci*, 171, 632–648. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0163-z>.
13. Vlasjuk A.P., Martyniuk P.M., Fursovych O.R. (2009). Numerical solution of a one-dimensional problem of filtration consolidation of saline soils in a nonisothermal regime. *J Math Sci*, 160, 525–535. <https://doi.org/10.1007/s10958-009-9518-8>.