

Про розв'язки матричного многочленного рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ над полем

Volodymyr Prokip^a

IAPMM NAS of Ukraine,

3b Naukova Str., L'viv, Ukraine, 79601

e-mail: v.prokip@gmail.com

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.101>

Анотація – Розглядається матричне рівняння Сильвестра $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$, де $A(\lambda), B(\lambda)$ і $C(\lambda)$ відомі многочленні матриці над довільним полем, а $X(\lambda)$ та $Y(\lambda)$ невідомі матриці. Наведено умови, за яких рівняння Сильвестра сумісне для довільної матриці $C(\lambda)$. Запропоновано метод знаходження розв'язків рівняння Сильвестра у випадку, коли визначники матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ є взаємно простими та вказано структуру його загального розв'язку. Крім цього наведено умови, за яких розв'язок рівняння Сильвестра визначений однозначно.

Ключові слова — кільце многочленів, матриця, рівняння Сильвестра, розв'язок

I. ВСТУП

Нехай R – комутативне кільце з одиницею. Введемо позначення: $R_{m,n}$ – множина $m \times n$ матриць над R , $GL(m, R)$ – множина оборотних матриць в $R_{m,m}$, I_n – одинична $n \times n$ матриця і $0_{m,n}$ – нульова матриця вимірності $m \times n$. Якщо $R=F$ поле, то $F[\lambda]$ кільце многочленів над полем F .

Розглянемо матричне рівняння

$$AX + YB = C, \quad (1)$$

де $A \in R_{m,m}, B \in R_{n,n}, C \in R_{m,n}$, а X та Y невідомі $m \times n$ матриці над R . Рівняння (1) називають також матричним рівнянням Сильвестра. Якщо в рівнянні (1) матриця A лівий дільник матриці C або матриця B правий дільник матриці C , то рівняння (1) розв'язне. Зрозуміло, що в цих випадках задача про розв'язність рівняння (1) є тривіальною. Зауважимо, що рівняння (1) є одним із найвідоміших матричних рівнянь у теорії матриць та її застосуваннях (див. [15], [17], [18]).

Основною проблемою при дослідженні рівняння (1) є встановлення умов його розв'язності, описання структури його розв'язків та методів їх побудови. Якщо рівняння (1) сумісне над R , то

матриці $M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0_{n,m} & B \end{bmatrix}$ і $M_0 = \begin{bmatrix} A & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & B \end{bmatrix}$ екві-

валентні. Рот (Roth, [26]) довів, що рівняння (1) над полем F сумісне тоді і тільки тоді, коли матриці M_C і M_0 еквівалентні над F . Інше доведення теореми Рота наведено в роботі [11]. В роботі [23] по-

казано, що цей результат не допускає узагальнення для випадку нескінченної розмірності матриць A, B і C у рівнянні (1).

Існує значна кількість статей з лінійної алгебри та теорії матриць, в яких досліджується рівняння Сильвестра. Багато авторів досліджували умови, за яких для рівняння (1) над полем, зокрема над полем дійсних та комплексних чисел, існують розв'язки з певними властивостями (див. [3], [7], [8], [20], [21], [28], [30]). В роботах [19], [29] наведено умови сумісності рівняння (1) над тілом кватерніонів, а в роботах [9], [13], [22], [25] над комутативними кільцями.

Джонс (Jones, [14]) показав, що умова Рота сумісності рівняння (1) є вірною у випадку, якщо R кільце аналітичних функцій над полем комплексних чисел. Густафсон (Gustafson) в роботі [12] довів, що рівняння (1) над комутативним кільцем R з одиницею сумісне тоді і тільки тоді, коли матриці M_C і M_0 еквівалентні над кільцем R .

Умови, за яких для рівняння (1) над кільцем $F[\lambda]$ існують мінімальні розв'язки, тобто такі, що $\deg X(\lambda) < \deg B(\lambda)$ (або $\deg Y(\lambda) < \deg A(\lambda)$), наведено в роботах [2], [4], [5], [10], [24], [27]. Методи побудови розв'язків рівняння (1) при тих чи інших обмеженнях запропоновано в роботах [1–3], [6], [16], [25].

В даній статті розглядається матричне рівняння Сильвестра $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$, де $A(\lambda), B(\lambda)$ і $C(\lambda)$ відомі неособливі многочленні матриці над довільним полем F , а $X(\lambda)$ та $Y(\lambda)$ невідомі многочленні матриці над F . Наведено умови, за яких рівняння Сильвестра сумісне. Запропоновано метод знаходження розв'язків рівняння Сильвестра у випадку, коли визначники матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ є взаємно простими та вказано структуру його загального розв'язку. Крім цього, наведено умови, за яких розв'язок рівняння Сильвестра визначений однозначно. Зауважимо, що окремі з наведених результатів є вірними для матричного рівняння Сильвестра над областями Безу.

II. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Надалі $R = F[\lambda]$ – кільце многочленів над до-
вільним полем F . Під записом $(a(\lambda), b(\lambda)) = d(\lambda)$
будемо розуміти, що $d(\lambda) \in F[\lambda]$ є найбільшим
спільним дільником многочленів $a(\lambda), b(\lambda) \in F[\lambda]$.
Відомо, що для многочленів $a(\lambda), b(\lambda) \in F[\lambda]$ існує
єдина пара многочленів $p(\lambda), q(\lambda) \in F[\lambda]$ таких, що
 $a(\lambda) = p(\lambda)b(\lambda) + q(\lambda)$ і $\deg q(\lambda) < \deg b(\lambda)$.

Розглянемо неоднорідне діофантове рівняння

$$a(\lambda)x(\lambda) + b(\lambda)y(\lambda) = c(\lambda), \quad (2)$$

де $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda) \in F[\lambda]$ відомі многочлени, а $x(\lambda)$
та $y(\lambda)$ невідомі многочлени над F . Відомо, що
рівняння (2) є розв'язним тоді й тільки тоді, коли
найбільший спільний дільник $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ є діль-
ником $c(\lambda)$, тобто $(a(\lambda), b(\lambda)) \mid c(\lambda)$. Нехай пара
многочленів $x_0(\lambda), y_0(\lambda) \in F[\lambda]$ – розв'язок рів-
няння (2). Якщо ж для цього розв'язку виконується
одна з умов:

$$\deg x_0(\lambda) < \deg b(\lambda) \text{ або } \deg y_0(\lambda) < \deg a(\lambda),$$

то такий розв'язок називають мінімальним. Зазна-
чимо, якщо рівняння (2) є розв'язним, то серед його
розв'язків існують мінімальні (див. [2]).

Твердження 1. Нехай $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda) \in F[\lambda]$.
Нехай, далі, $\deg a(\lambda) = p \geq 1$ і $\deg b(\lambda) = q \geq 1$.
Рівняння (2) має єдиний мінімальний розв'язок
 $x_0(\lambda), y_0(\lambda)$ такий, що $\deg y_0(\lambda) < \deg a(\lambda)$, тоді
й тільки тоді, коли многочлени $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ є вза-
ємно простими.

Доведення. Необхідність доведена в [2].

Достатність. Нехай $x_0(\lambda), y_0(\lambda) \in F[\lambda]$ –
єдиний мінімальний розв'язок рівняння (2), тобто
 $a(\lambda)x_0(\lambda) + b(\lambda)y_0(\lambda) = c(\lambda)$, $\deg x_0(\lambda) < \deg b(\lambda)$.
Припустимо, що $(a(\lambda), b(\lambda)) = d(\lambda) \neq \text{const}$. Отже,
 $a(\lambda) = d(\lambda)a_1(\lambda)$, $b(\lambda) = d(\lambda)b_1(\lambda)$, $c(\lambda) = d(\lambda)c_1(\lambda)$
і $a_1(\lambda)d(\lambda)x_0(\lambda) + b_1(\lambda)d(\lambda)y_0(\lambda) = c_1(\lambda)d(\lambda)$.

Так як $0 \leq \deg x_0(\lambda) - \deg b_1(\lambda) < \deg b(\lambda)$,
то пара многочленів $x_0(\lambda) - b_1(\lambda)$, $y_0(\lambda) + a_1(\lambda)$ є
мінімальним розв'язком рівняння (2), тобто

$$a_1(\lambda)d(\lambda)(x_0(\lambda) - b_1(\lambda)) + b_1(\lambda)d(\lambda)(y_0(\lambda) + a_1(\lambda)) = c_1(\lambda)d(\lambda).$$

Отже, якщо многочлени $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ не є взає-
мно простими, то рівняння (2) має принаймні два
мінімальних розв'язки. Проте це не узгоджується із
припущенням про те, що мінімальний розв'язок
рівняння $a(\lambda)x(\lambda) + b(\lambda)y(\lambda) = c(\lambda)$ єдиний при
умові $(a(\lambda), b(\lambda)) = d(\lambda) \neq \text{const}$.

Таким чином доведено, що мінімальний роз-
в'язок рівняння $a(\lambda)x(\lambda) + b(\lambda)y(\lambda) = c(\lambda)$ єдиний

тоді і тільки тоді, коли $(a(\lambda), b(\lambda)) = 1$. Твердження
доведено.

Аналогічно доводиться наступне твердження.

Твердження 1а. Нехай $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda) \in F[\lambda]$.
Нехай, далі, $\deg a(\lambda) = p \geq 1$ і $\deg b(\lambda) = q \geq 1$.
Рівняння (2) має єдиний мінімальний розв'язок
 $x_0(\lambda), y_0(\lambda)$ такий, що $\deg x_0(\lambda) < \deg b(\lambda)$, тоді
й тільки тоді, коли многочлени $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ є вза-
ємно простими.

Зауважимо, що доведення достатності у тверд-
женні 1 є альтернативним до його доведення у
твердженні 1 в роботі [2].

Надалі будемо розглядати матричне рівняння

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda), \quad (3)$$

де $A(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ та $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ – неособливі
матриці і $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. При заданих обмеженнях
для рівняння (3) наведемо умови його сумісності та
опишемо структуру його розв'язків.

Твердження 2. Нехай в рівнянні (3) матриці
 $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ неособливі. Нехай, далі, має місце
($\det A(\lambda), \det B(\lambda)$) = $d(\lambda)$. Якщо рівняння (3) су-
місне, то

$$A^*(\lambda)C(\lambda)B^*(\lambda) = d(\lambda)Q(\lambda), \quad (4)$$

де $A^*(\lambda)$ і $B^*(\lambda)$ приєднані матриці до матриць
 $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ відповідно.

Доведення. Нехай рівняння (3) сумісне, тобто
 $A(\lambda)X_0(\lambda) + Y_0(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$. Звідси дістаємо

$$\det A(\lambda)X_0(\lambda)B^*(\lambda) + A^*(\lambda)Y_0(\lambda)\det B(\lambda) = A^*(\lambda)C(\lambda)B^*(\lambda).$$

Звідси отримуємо, що $d(\lambda) = (\det A(\lambda), \det B(\lambda))$ є
дільником елементів матриці $A^*(\lambda)C(\lambda)B^*(\lambda)$,
тобто $A^*(\lambda)C(\lambda)B^*(\lambda) = d(\lambda)Q(\lambda)$. Твердження
доведено.

Нижче опишемо клас рівнянь (3) над $F[\lambda]$, для
яких умова (4) твердження 2 буде достатньою.

Теорема 1. Нехай для неособливих матриць
 $A(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ і $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ виконується
($\det A(\lambda), \det B(\lambda)$) = $d(\lambda)$. Тоді для довільної ма-
триці $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ рівняння

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = d(\lambda)C(\lambda) \quad (5)$$

сумісне над $F[\lambda]$.

Доведення. Покладемо $\det A(\lambda) = a(\lambda)$ і
 $\det B(\lambda) = b(\lambda)$. Для многочленів $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$
існують многочлени $u(\lambda), v(\lambda) \in F[\lambda]$ такі, що

$a(\lambda)u(\lambda) + b(\lambda)v(\lambda) = d(\lambda)$. Отже, для довільної матриці $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ отримуємо

$$a(\lambda)u(\lambda)C(\lambda) + v(\lambda)C(\lambda)b(\lambda) = d(\lambda)C(\lambda). \quad (6)$$

Рівність (6) перепишемо у вигляді

$$A(\lambda)(A^*(\lambda)C(\lambda)u(\lambda)) + (C(\lambda)B^*(\lambda)v(\lambda))B(\lambda) = d(\lambda)C(\lambda). \quad (7)$$

Тепер із рівності (7) дістаємо, що для матриць

$$X_0(\lambda) = u(\lambda)A^*(\lambda)C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda],$$

$$Y_0(\lambda) = v(\lambda)C(\lambda)B^*(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$$

виконується $A(\lambda)X_0(\lambda) + Y_0(\lambda)B(\lambda) = d(\lambda)C(\lambda)$.

Отже, рівняння (5) сумісне. Матриці $X_0(\lambda)$ і $Y_0(\lambda)$ будемо називати частинним розв'язком рівняння (5).

Тепер неважко переконатись в тому, що для довільної матриці $G(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ пара матриць

$$X_G(\lambda) = X_0(\lambda) + b(\lambda)A^*(\lambda)G(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda],$$

$$Y_G(\lambda) = Y_0(\lambda) - a(\lambda)G(\lambda)B^*(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$$

є загальним розв'язком рівняння (5). Лему доведено.

Наслідок 1. Нехай матриці $A(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ і $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ – неособливі і $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. Нехай, далі, $(\det A(\lambda), \det B(\lambda)) = d(\lambda)$. Якщо $C(\lambda) = d(\lambda)C_1(\lambda)$, то матричне рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ сумісне.

Якщо $A(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ і $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ неособливі із взаємно простими визначниками, тобто $(\det A(\lambda), \det B(\lambda)) = 1$, то на підставі наслідку 1 отримуємо, що рівняння (3) сумісне для довільної матриці $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. З огляду на твердження 1, теорему 1 та наслідок 1 отримуємо.

Наслідок 2. Нехай визначники неособливих матриць $A(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ і $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ взаємно прості, тобто $(\det A(\lambda), \det B(\lambda)) = 1$. Нехай, далі, $u(\lambda), v(\lambda) \in F[\lambda]$ такі, що

$$u(\lambda)(\det A(\lambda)) + v(\lambda)(\det B(\lambda)) = 1$$

Якщо $\deg u(\lambda) < \deg \det B(\lambda)$, то для довільної матриці $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ частинний розв'язок

$$X_0(\lambda) = u(\lambda)A^*(\lambda)C(\lambda), \quad Y_0(\lambda) = v(\lambda)C(\lambda)B^*(\lambda)$$

рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ многочленом $u(\lambda)$ визначається однозначно.

Наслідок 3. Нехай визначники неособливих матриць $A(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ і $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ взаємно прості, тобто $(\det A(\lambda), \det B(\lambda)) = 1$. Нехай, далі, $u(\lambda), v(\lambda) \in F[\lambda]$ такі, що

$$u(\lambda)(\det A(\lambda)) + v(\lambda)(\det B(\lambda)) = 1.$$

Якщо $\deg v(\lambda) < \deg \det A(\lambda)$, то для довільної матриці $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ частинний розв'язок

$$X_0(\lambda) = u(\lambda)A^*(\lambda)C(\lambda), \quad Y_0(\lambda) = v(\lambda)C(\lambda)B^*(\lambda)$$

рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ многочленом $u(\lambda)$ і $v(\lambda)$ визначається однозначно.

Наведений вище результат проілюструємо на прикладі. Нехай $F \in \mathbb{Q}$ – поле раціональних чисел.

Приклад. Розглянемо неособливі многочленні матриці $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 3\lambda & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ і $B(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4\lambda + 5 & \lambda^2 \end{bmatrix}$ над полем $\mathbb{Q}$ із визначниками $\det A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 4$ і

$$\det B(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5 \quad \text{відповідно і} \quad C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & \lambda^2 + 4\lambda \\ 1 & 2\lambda + 3 \end{bmatrix}.$$

Для $\det A(\lambda)$ і $\det B(\lambda)$ існує єдина пара многочленів $u(\lambda) = 0,5\lambda + 1,5$ і $v(\lambda) = -0,5\lambda - 1$ таких, що $u(\lambda)(\det A(\lambda)) + v(\lambda)(\det B(\lambda)) = 1$ і $\deg u(\lambda) < \deg \det B(\lambda)$. Тоді пара матриць

$$X_0(\lambda) = u(\lambda)A^*(\lambda)C(\lambda) =$$

$$\begin{bmatrix} (\lambda^2 + 4\lambda + 3)/2 & (\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9)/2 \\ (\lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 9)/2 & (2\lambda^4 + 14\lambda^3 + 39\lambda^2 + 60\lambda + 45)/2 \end{bmatrix},$$

$$Y_0(\lambda) = v(\lambda)C(\lambda)B^*(\lambda) =$$

$$\begin{bmatrix} (3\lambda^4 + 25\lambda^3 + 58\lambda^2 + 40\lambda)/2 & (-\lambda^3 - 7\lambda^2 - 12\lambda - 4)/2 \\ (7\lambda^3 + 36\lambda^2 + 59\lambda + 30)/2 & -\lambda^2 - 4\lambda - 4 \end{bmatrix}$$

єдиний частинний розв'язок заданого рівняння.

Тепер за частинним розв'язком заданого рівняння легко побудувати його загальний розв'язок.

Враховуючи твердження 1 і 1а встановимо умови існування “мінімальних” розв'язків матричного рівняння (3). Наступні теореми узагальнюють основні результати робіт [4], [10] і [24].

Теорема 2. Нехай матриці $A(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ та $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ неособливі і $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. Нехай, далі, $B(\lambda)$ лівоеквівалентна регулярній многочленній матриці, тобто існує зворотна матриця $W(\lambda) \in GL(n, F[\lambda])$ така, що

$$W(\lambda)B(\lambda) = I_n \lambda^r + \sum_{i=1}^r D \lambda^{r-i}, \quad \text{де } r < \deg B(\lambda).$$

Рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ має єдиний розв'язок $\{X_0(\lambda), Y_0(\lambda)\}$ такий, що $\deg X_0(\lambda) < r$ тоді і тільки тоді, коли визначники матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ взаємно прості.

Теорема 3. Нехай матриці $A(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ та $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ неособливі і $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. Нехай, далі, $A(\lambda)$ правоеквівалентна регулярній многочленній матриці, тобто існує зворотна матриця $W(\lambda) \in GL(m, F[\lambda])$ така, що

$$A(\lambda)W(\lambda) = I_m \lambda^r + \sum_{i=1}^r D \lambda^{r-i}, \quad \text{де } r < \deg B(\lambda).$$

Рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ має єдиний розв'язок $\{X_0(\lambda), Y_0(\lambda)\}$ такий, що така, що $\deg Y_0(\lambda) < r$ тоді і тільки тоді, коли визначники матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ взаємно прості.

З огляду на результати Розділу 2 та роботи [2], [4], [10] і [24] зазначимо, що єдині мінімальні розв'язки матричного рівняння (3) існують лише у випадку, коли неособливі матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ мають взаємно прості визначники. Такі розв'язки розділимо на три класи:

1) Мінімальні розв'язки рівняння (3), які визначаються принаймні однією регулярною матрицею $A(\lambda)$ або $B(\lambda)$, або одніє з неособливих матриць $A(\lambda)$ або $B(\lambda)$, яка односторонніми перетвореннями еквівалентності приводиться до регулярної многочленної матриці;

2) Мінімальні розв'язки рівняння (3), які визначаються формою Ерміта однієї з неособливих матриць $A(\lambda)$ або $B(\lambda)$;

3) Мінімальні розв'язки рівняння (3), які визначаються єдиним мінімальним розв'язком рівняння $u(\lambda)(\det A(\lambda)) + v(\lambda)(\det B(\lambda)) = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] В.М. Прокіп, "Про подільність із залишком матриць над областю головних ідеалів," Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2017, Т. 60, № 2, С. 41–50.
Те саме: V. M. Prokip, "On the divisibility of matrices with remainder over the domain of principal ideals," J. Math. Sci., 2019, vol. 243, No. 1., pp. 45–55.
<https://doi.org/10.1007/s10958-019-04524-2>
- [2] В.М. Прокіп, О.М. Мельник, Р.В. Коляда, "Про подільність із остачею многочленних матриць над довільним полем," Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2023, Т. 66, № 1-2., С. 23–39.
Те саме: V.M. Prokip, O.M. Mel'nyk, R.V. Kolyada, "On the divisibility with remainder of polynomial matrices over an arbitrary field," J Math. Sci., 2025, Vol. 291, No 5., pp. 586–607.
<https://doi.org/10.1007/s10958-025-07839-5>
- [3] J. K. Baksalary, R. Kala, "The matrix equation $ax - yb = c$," Linear Algebra Appl., 1979, Vol. 25, pp. 41–43.
[https://doi.org/10.1016/0024-3795\(79\)90004-1](https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90004-1)
- [4] S. Barnett, "Regular polynomial matrices having relatively prime determinants," Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1969, Vol. 65, No. 3., pp. 585–590.
<https://doi.org/10.1017/S0305004100003364>
- [5] S. Chen, Y. Tian, "On solutions of generalized Sylvester equation in polynomial matrices," J. Franklin Inst., 2014, Vol. 351, No. 12., pp. 5376–5385.
<https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.09.024>
- [6] D.S. Cvetković-Ilić, J. Nikolov Radenković and Q-W. Wang, "Algebraic conditions for the solvability to some systems of matrix equations," Linear Multilinear Algebra, 2021, Vol. 69, No. 9., – pp 79–1609.
<https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1633993>
- [7] A. Dmytryshyn, B. Kågström, "Coupled Sylvester-type matrix equations and block diagonalization," SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2015, Vol. 36, No. 2., pp. 580–593.
<https://doi.org/10.1137/151005907>
- [8] A.E. Emre, L.M. Silverman, "The equation $XR + QY = \Phi$: a characterization of solutions," SIAM J. Control Optim., 1981, Vol. 19, No. 1., pp. 33–38. <https://doi.org/10.1137/0319003>
- [9] R.B. Feinberg, "Equivalence of partitioned matrices," Res. Nat. Bur. Standards, 1976, 80B, No. 1., pp. 89–97.
- [10] J. Feinstein, Y. Bar-Ness, "On the uniqueness minimal solution to the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) - Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$," J. Franklin Inst., 1980, Vol. 310, No. 2., pp. 131–134.
[https://doi.org/10.1016/0016-0032\(78\)90012-1](https://doi.org/10.1016/0016-0032(78)90012-1)
- [11] H. Flanders, H.K. Wimmer, "On the matrix equations $AX - XB = C$ and $AX - YB = C$," SIAM J. Appl. Math., 1977, Vol. 32, № 4., pp. 707–710. <https://doi.org/10.1137/0132058>
- [12] W.H. Gustafson, "Roth's theorems over commutative rings," Linear Algebra Appl., 1979, Vol. 23, pp. 245–251.
[https://doi.org/10.1016/0024-3795\(79\)90106-X](https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90106-X)
- [13] R.E. Hartwig, "Roth's equivalence problem in unit regular rings," Proc. Amer. Math. Soc., 1976, Vol. 59, No. 1., pp. 39–44.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0409543-4>
- [14] J. (Jr.) Jones, "A Diophantine matrix equation," Amer. Math. Monthly, 1955, Vol. 62, No. 4., pp. 244–247.
<https://doi.org/10.2307/2306696>
- [15] T. Kaczorek, "Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory," London: Springer, 2007, 503 p.
- [16] Y. Ke, C. Ma, "An alternating direction method for nonnegative solutions of the matrix equation $AX + YB = C$," Comput. Appl. Math., 2017, Vol. 36, No. 1., pp. 359–365.
<https://doi.org/10.1007/s40314-015-0232-5>
- [17] T. Kailath, "Linear Systems," Prentice Hall, New Jersey; 1980, 682 p.
- [18] V. Kucera, "Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems," Prentice Hall, New York, 1991, 472 p.
- [19] I. Kyrchei, "Cramer's rules for Sylvester quaternion matrix equation and its special cases," Adv. Appl. Clifford Algebr., 2018, Vol. 28, pp. 1–26.
<https://doi.org/10.1007/s00006-018-0909-0>
- [20] Lin M., Wimmer H.K. "The generalized Sylvester matrix equation, rank minimization and Roth's equivalence theorem" // Bul. Aust. Math. Soc. – 2011. – Vol. 84, No. 3. – P. 441–443.
<https://doi.org/10.1017/S0004972711002334>
- [21] Y.H. Liu, "Ranks of solutions of the linear matrix equation $AX + YB = C$," Comp. Math. Appl., 2006, Vol. 52, No. 6-7., pp. 861–872. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.05.011>
- [22] N. Ito, H.K. Wimmer, "Rank minimization of generalized Sylvester equations over Bezout domains," Linear Algebra Appl., 2013, Vol. 439, No. 3., pp. 592–599.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.11.012>
- [23] V. Olshevsky, "Similarity of block diagonal and block triangular matrices," Integral Equations Operator Theory, 1992, Vol. 15, No. 5., pp. 853–863.
<https://doi.org/10.1007/BF01200704>
- [24] V.M. Prokip, "About the uniqueness solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) - Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$," Lobachevskii J. Math., 2008, Vol. 29, No. 3., pp. 186–191.
<https://doi.org/10.1134/S1995080208030098>
- [25] V. Prokip, "On solvability of the matrix equation $AX + YB = C$ over principal ideal domains," Modeling, control and information technologies, 2024, No. 7., pp. 264–267.
<https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.081>
- [26] W.E. Roth, "The equation $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices," Proc. Amer. Math. Soc., 1952, Vol. 97, No. 3., pp. 392–396. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1952-0047598-3>
- [27] Y. Tian, C. Xia, "On the low-degree solution of the Sylvester matrix polynomial equation," Hindawi J. Math., 2021, 2021., Article ID 4612177. <https://doi.org/10.1155/2021/4612177>
- [28] H.K. Wimmer, "Roth's theorems for matrix equations with symmetry constraints," Linear Algebra Appl., 1994, Vol. 199, pp. 357–362.
[https://doi.org/10.1016/0024-3795\(94\)90358-1](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90358-1)
- [29] L-M. Xie, Q-W. Wang and Z-H. He, "The generalized hand-eye calibration matrix equation $AX - YB = C$ over dual quaternions," / Comp. Appl. Math., 2025, Vol. 44, 137.
<https://doi.org/10.1007/s40314-025-03102-4>
- [30] H.K. Wimmer, "The generalized Sylvester equation in polynomial matrices," IEEE Transactions on automatic control, 1996, Vol. 41, No. 9., pp. 1372–1376.