

Моделювання дифузійних процесів у багатофазному випадково неоднорідному тілі з використанням діаграм Фейнмана

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.107>

Юрій Чернуха

Кафедра обчислювальної математики і програмування
Національний університет “Львівська політехніка”,
Львів, Україна

yurii.a.chernukha@lpnu.ua

Abstract—Проведено математичне моделювання дифузії домішки в багатофазному випадково неоднорідному тілі. Рівняння дифузії сформульовані для кожної фази, на випадкових міжфазних границях задані неідеальні умови контакту. Задачу зведено до інтегро-диференційного рівняння з випадковим ядром. Розв'язок отримано у вигляді ряду Неймана, усереднення проведено за ансамблем конфігурацій фаз. Розвинуто техніку діаграм Фейнмана для параболічних задач, отримано рівняння Дайсона для усередненого поля концентрації. У наближенні Бурре отримано рівняння масоперенесення для середовища з рівномірним розподілом фаз.

Ключові слова— математичне моделювання, дифузія, багатофазне випадково неоднорідне середовище, усереднене поле, діаграма Фейнмана.

I. ВСТУП

Діаграми Фейнмана є одним з базових інструментів сучасної науки: від квантової теорії поля до алгоритмічних методів обчислень [1,2,3]. У задачах математичного моделювання процесів масоперенесення [4] в стохастично неоднорідних багатофазних тілах діаграмні підходи дають узгоджений опис випадкових міжфазних взаємодій і статистики полів. Запропонований підхід є зручним для перетворень і аналізу і дає відмінні від гомогенізованих моделей результати, забезпечуючи системне врахування випадкової геометрії.

В роботі розвинуто техніку діаграм Фейнмана для моделювання дифузії домішки в багатофазному випадково неоднорідному тілі за неідеальних умов на випадкових межах контакту фаз. Отримано інтегро-диференціальне рівняння з випадковим ядром та рівняння на усереднене за ансамблем конфігурацій фаз поле концентрації, подане через масовий оператор. Крайова задача отримана та розв'язана для двофазного тіла за рівномірного розподілу фаз.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо дифузію домішкової речовини у багатофазному випадково неоднорідному тілі, яке складається з $N+1$ твердих, різних за густиною та коефіцієнтом дифузії фаз – матриці і включень довільної форми. При цьому точна геометрична конфігурація фаз в області тіла невідома. Тоді коор-

динати розташування включень є невідомими, але приймаємо, що відомий закон їхнього імовірнісного розподілу [5]. Крім того, вважаємо, що об'ємна частка матриці є набагато більшою, ніж об'ємна частка включення, $v_j \ll v_0$ ($j = 1, \dots, N$). Припускаємо, що густина тіла та коефіцієнт дифузії є сталими в об'ємі кожної фази.

Концентрації $c_j(\vec{r}, t)$ домішкової речовини в матриці (область Ω_0) і включеннях (області Ω_j , $j = 1, \dots, N$) визначаються з рівнянь дифузії [6], сформульованих для кожної фази окремо

$$\rho_j \frac{\partial c_j(\vec{r}, t)}{\partial t} = d_j \Delta c(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \Omega_j, \quad t \in [0, \tau], \quad \tau < \infty. \quad (1)$$

Тут ρ_j – густина речовини в області Ω_j ; $d_j = \rho_j D_j$ – кінетичний коефіцієнт перенесення домішки в Ω_j , D_j – коефіцієнт дифузії.

Вважаємо, що на зовнішній границі тіла знаходиться матриця і задані такі початкові і граничні умови

$$c_j(\vec{r}, t)|_{t=0} = \hat{c}_j(\vec{r}) \quad (j = 0, \dots, N), \\ c_0(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \partial V} = \tilde{c}(t). \quad (2)$$

На границях розділу областей Ω_0 та Ω_j ($j = 1, \dots, N$) виконуються умови неідеального контакту щодо концентрації [6, 7]

$$k_j c_j(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Gamma_{jl}-0} = k_l c_l(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Gamma_{jl}+0}; \quad (3)$$

$$\rho_j d_j \vec{\nabla} c_j(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Gamma_{jl}-0} = \rho_l d_l \vec{\nabla} c_l(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Gamma_{jl}+0}. \quad (4)$$

Тут Γ – загальна границя контакту фаз, яка складається з границь контакту однозв'язних областей

$\Gamma = \bigcup_{j=0}^N \bigcup_{i=1}^{n_j} \Gamma_{ji}$, де Γ_{ji} – межа i -ї однозв'язної області j -ї фази Ω_{ji} , n_j – кількість однозв'язних областей у фазі j .

Тоді випадковими величинами є границі контакту, тобто межі областей Ω_{ji} , які є внутрішніми для тіла, що призводить до стохастичності поля концентрації дифундууючої речовини.

III. РІВНЯННЯ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ДЛЯ УСЬОГО ТІЛА

Зведемо контактну задачу (1), (3), (4) до рівняння масоперенесення для тіла в цілому. Введемо в розгляд випадкову функцію просторових координат $c(\vec{r}, t)$, яка описує концентрацію в усьому тілі

$$c(\vec{r}, t) = \begin{cases} c_j(\vec{r}, t), & \vec{r} \in (V^{(j)}) \\ \text{контактні умови (3), (4),} & \vec{r} \in \Gamma. \end{cases} \quad j = 0, \dots, N$$

Знаходимо $\bar{\nabla} c(\vec{r}, t)$ і $\Delta c(\vec{r}, t)$ з урахуванням розривів 1-го роду (умови (3), (4)) на границях контакту областей Γ , які підставляємо в рівняння балансу маси. Введемо в розгляд випадковий оператор $\eta_{ji}(\vec{r})$, визначений таким чином

$$\eta_{ji}(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \vec{r} \in \Omega_{ji}, \\ 0, & \text{якщо } \vec{r} \notin \Omega_{ji}, \end{cases} \quad \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ji}(\vec{r}) = 1.$$

Тоді маємо [8]

$$\begin{aligned} Lc \equiv & \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{n_j} \rho_j \eta_{ji}(\vec{r}) \frac{\partial c}{\partial t} - \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{n_j} d_j \eta_{ji}(\vec{r}) \Delta c - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{n_j} [d(\vec{r})]_{\Gamma_{ji}} [\bar{\nabla} c]_{\Gamma_{ji}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ji}}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{n_j} [d(\vec{r})]_{\Gamma_{ji}} [\bar{\nabla} c]_{\Gamma_{ji}} \bar{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ji}}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{n_j} [d(\vec{r})]_{\Gamma_{ji}} [c]_{\Gamma_{ji}} \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ji}}) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\vec{r}_{\Gamma}$ – радіус-вектор точок границі Γ ; $[\dots]_{\Gamma}$ – стрибок функції на границі Γ ; $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

Додамо і віднімемо в рівнянні (5) детермінований оператор $L_0(\vec{r}, t)$ з коефіцієнтами, що є характеристиками основної фази (матриці)

$$L_0(\vec{r}, t) = L_0(z, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} - d_0 \Delta.$$

Тоді одержимо

$$L_0(\vec{r}, t) c(\vec{r}, t) = L_s(\vec{r}, t) c(\vec{r}, t), \quad (6)$$

де оператор $L_s(\vec{r}, t)$ є наступним

$$\begin{aligned} L_s(\vec{r}, t) = & \sum_{j=1}^N (\rho_0 - \rho_j) \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ji}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} - \\ & - \sum_{j=1}^N (d_0 - d_j) \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ji}(\vec{r}) \Delta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{n_j} [d(\vec{r})]_{\Gamma_{ji}} [\bar{\nabla} \dots]_{\Gamma_{ji}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ji}}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{n_j} [d(\vec{r})]_{\Gamma_{ji}} [\dots]_{\Gamma_{ji}} \bar{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ji}}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^{n_j} [d(\vec{r})]_{\Gamma_{ji}} [\dots]_{\Gamma_{ji}} \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ji}}). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином отримано стохастичне диференціальне рівняння масоперенесення домішки для середовища з випадково розташованими включеннями у вигляді (5), а «збурене» диференціальне рівняння – (6) з випадковим оператором (7).

IV. ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ. РЯД НЕЙМАНА

Розглядаючи праву частину рівняння (6) як джерела, будемо інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній контактній-крайовій задачі (1), (2), (3), (4) [8]

$$c(\vec{r}, t) = c_h(\vec{r}, t) + \int_0^t \int_{(V)} G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') L_s(\vec{r}', t') c(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt'. \quad (8)$$

Тут $c_h(\vec{r}, t)$ – розв'язок однорідної крайової задачі,

$G(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ – функція Гріна, яка є розв'язком відповідної детермінованої крайової задачі з точковим джерелом.

Розв'язок інтегро-диференціального рівняння (8) шукаємо у вигляді інтегрального ряду Неймана, вибравши за нульове наближення концентрацію в однорідному тілі $c_h(\vec{r}, t)$.

$$\begin{aligned} c = c_h & + \int_0^t \int_{(V)} GL_s c_h d\vec{r}' dt' + \int_0^t \int_{(V)} GL_s \int_0^{t'} \int_{(V)} GL_s c_h d\vec{r}'' dt'' d\vec{r}' dt' + \\ & + \int_0^t \int_{(V)} GL_s \int_0^{t'} \int_{(V)} GL_s \int_0^{t''} \int_{(V)} GL_s c_h d\vec{r}''' dt''' d\vec{r}'' dt'' d\vec{r}' dt' + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

V. ТЕХНІКА ДІАГРАМ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЗАДАЧІ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Щоб дослідити структуру ряду (9), введемо графічне зображення його елементів у вигляді діаграм Р. Фейнмана

$$G(\vec{r}', \vec{r}'', t', t'') \sim \overline{(\vec{r}', t') (\vec{r}'', t'')}$$

Оператору $L_s(\vec{r}', t')$ співставимо вертикальний відрізок з крапками на кінцях

$$L_s(\vec{r}', t') \sim \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ (\vec{r}', t') \end{array}.$$

Функціям випадкового поля концентрації $c(\vec{r}, t)$ та поля концентрації в однорідному тілі $c_h(\vec{r}, t)$ співставимо діаграму-галочку та хвилясту лінію відповідно

$$c(\vec{r}, t) \sim \text{галочка}, \quad c_h(\vec{r}, t) \sim \text{хвиляста лінія}.$$

Тоді ряд (9) у графічному представленні набуде такого вигляду

$$\text{галочка} = \text{хвиляста лінія} + \frac{\text{галочка}}{(r', t')} + \frac{\text{галочка}}{(\vec{r}', t') (\vec{r}'', t'')} + \frac{\text{галочка}}{(\vec{r}', t') (\vec{r}'', t'') (\vec{r}''', t''')} + \dots + \frac{\text{галочка}}{(\vec{r}^{(n-1)}, t^{(n-1)}) (\vec{r}^{(n)}, t^{(n)})}.$$

Усереднено випадкове поле концентрації (9) за ансамблем конфігурацій фаз. Зауважимо, що за означенням кореляційна функція дорівнює

$$\psi_c(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \equiv \langle c(\vec{r}_1, t) c(\vec{r}_2, t) \rangle - \langle c(\vec{r}_1, t) \rangle \langle c(\vec{r}_2, t) \rangle. \quad (34)$$

Співставимо кумулянтній функції ψ_k пунктирні лінії, причому її порядок співпадає з порядком діаграм

$$\psi_k(\vec{r}', \vec{r}'', \dots, \vec{r}^{(k)}) \sim \text{пунктирна лінія}.$$

Введемо позначення для усередненого поля

$$\langle c(\vec{r}, t) \rangle \sim \text{жирна лінія}.$$

Для усередненого розв'язку отримаємо ряд

$$\begin{aligned} \text{жирна лінія} = & \text{хвиляста лінія} + \frac{\text{галочка}}{2} + \frac{\text{галочка}}{3} + \frac{\text{галочка}}{4} + \dots \\ & + \frac{\text{галочка}}{5} + \frac{\text{галочка}}{6} + \frac{\text{галочка}}{7} + \dots \\ & + \frac{\text{галочка}}{8} + \frac{\text{галочка}}{9} + \frac{\text{галочка}}{10} + \dots \\ & + \frac{\text{галочка}}{11} + \frac{\text{галочка}}{12} + \frac{\text{галочка}}{13} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Зазначимо, що відповідність між діаграмами Фейнмана та аналітичними виразами є взаємно однозначною.

Деякі з діаграм, що входять у (10), містять в якості фрагментів діаграми нижчого порядку. Цим можна скористатися для скорочення запису. Суму ряду (10) виразимо через суму деякої нескінченної підпоследовності цього ж ряду. Для цього класифікуємо діаграми, що входять у (10) [9].

Діаграма називається слабо зв'язаною, якщо її можна розділити на дві окремі діаграми, розірвавши деяку одну лінію G . У формулі (10) слабо зв'язаними є діаграми 3, 5-7, 10-13. Решта діаграм є сильно зв'язаними (1, 2, 4, 8, 9). Діаграми, що отримуються внаслідок розриву ліній G , в свою чергу можуть виявитися сильно або слабо зв'язаними. Якщо серед «вторинних» діаграм є слабо

зв'язані, то їх можна розбити на простіші діаграми. Продовжуючи цю процедуру, в результаті прийдемо до деякої кількості сильно зв'язаних діаграм. Число сильно зв'язаних діаграм, на які може бути розбита слабо зв'язана діаграма, є показником зв'язності вихідної діаграми. Для сильно зв'язаних діаграм прийемо показник зв'язності 1.

У ряді (10) відберемо всі сильно зв'язані діаграми, тобто такі, які неможливо розділити на дві окремі діаграми, розірвавши одну лінію G . Оскільки кожна з діаграм починається лінією G і закінчується хвилястою лінією c_h , то суму всіх сильно зв'язаних діаграм можна подати у вигляді

$$\bar{c}^{(s.c.)}(\vec{r}, t) \sim \text{хвиляста лінія}.$$

Тут ядро масового оператора можна подати в графічній формі

$$\text{хвиляста лінія} = \text{галочка} + \text{трикутник} + \text{квадрат} + \text{п'ятикутник} + \dots \quad (11)$$

Групуємо суми всіх сильно зв'язаних діаграм з однаковим показником зв'язності. Тоді можна подати усереднене поле концентрації як діаграмний ряд

$$\text{жирна лінія} = \text{хвиляста лінія} + \text{хвиляста лінія} \circ \text{хвиляста лінія} + \text{хвиляста лінія} \circ \text{хвиляста лінія} \circ \text{хвиляста лінія} + \dots$$

Ряд (11) є розв'язком рівняння Дайсона

$$\text{жирна лінія} = \text{хвиляста лінія} + \text{хвиляста лінія} \circ \text{хвиляста лінія}, \quad (12)$$

або, в аналітичній формі

$$\langle c(\vec{r}, t) \rangle = c_h(\vec{r}, t) + \int_0^t \int_{(V)} G \Sigma \langle c \rangle d\vec{r}' dt'. \quad (12a)$$

В загальному випадку оператор, а в частковому - функція, $\Sigma(\vec{r}, t)$ точно невідомий. В наближеному випадку, наприклад, в якості цього оператора можна використати суму декількох перших членів ряду (11). У випадку наближення Бурре [9] маємо

$$\Sigma \approx \Sigma_1 = \text{галочка} = \langle L_s(\vec{r}', t') \rangle. \quad (13)$$

Застосуємо до рівняння Дайсона (12) оператор $L_0(\vec{r}, t)$. Тоді отримаємо

$$\left[\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} - d_0 \Delta - \Sigma(\vec{r}, t) \right] \langle c(\vec{r}, t) \rangle = 0. \quad (14)$$

Для наближення Бурре (13) рівняння (14) набуде вигляду

$$\rho_0 \frac{\partial \langle c(\vec{r}, t) \rangle_B}{\partial t} - d_0 \Delta \langle c(\vec{r}, t) \rangle_B - \langle L_s(\vec{r}, t) \rangle \langle c(\vec{r}, t) \rangle_B = 0.$$

У випадку рівномірного розподілу N фаз одержимо рівняння для усередненого поля концентрації домішки в наближенні Бурре

$$\left[\rho_0 - \sum_{j=1}^N v_j (\rho_0 - \rho_j) \right] \frac{\partial \langle c(\vec{r}, t) \rangle_B}{\partial t} - \left[d_0 - \sum_{j=1}^N v_j (d_0 - d_j) \right] \Delta \langle c(\vec{r}, t) \rangle_B = 0. \quad (15)$$

Рівняння (15) разом із вихідними крайовими умовами можна розв'язати аналітично.

VI. ДИФУЗИЯ ДОМІШКИ У ДВОФАЗНОМУ ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНОМУ ШАРІ

Розв'язок крайової задачі (15) для двофазного тіла ($N = 2$) з вихідними крайовими умовами (2) знайдено у вигляді [6]

$$\langle c(z, t) \rangle_B = \tilde{c}_1 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) + \tilde{c}_2 \frac{z}{z_0} - \frac{2}{\rho_0 z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} \left(\tilde{c}_1 + (-1)^{n+1} \tilde{c}_2 \right) e^{-\frac{[d_0 - v_1 (d_0 - d_1)] z_n^2 t}{\rho_0 - v_1 (\rho_0 - \rho_1)}} \sin(z_n z).$$

Проілюструємо розподіли усередної концентрації домішкових частинок, що мігрують в двофазному шарі. Числові розрахунки проводились у безрозмірних змінних [10]

$$\xi = z/z_0, \quad \tau = dt/\rho z_0^2.$$

У якості базових використано такі значення параметрів: $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 1.1$, $d_0 = 1$, $d_1 = 0.5$ і 1.5 , $v_1 = 0.1$, $\xi_0 = 1$, $\tilde{c}_1 = 1$, $\tilde{c}_2 = 0.05$.

Рис. 1 ілюструє розподіли усередненої за ансамблем конфігурації фаз концентрації $\langle c(\xi, \tau) \rangle / \tilde{c}_1$ (криві а, суцільні лінії), концентрації в шарі з усередненими за об'ємом характеристиками (криві б, штрих-пунктирні лінії) і концентрації в однорідному шарі з характеристиками матриці (криві с, штрихові лінії) в моменти часу $\tau = 0.01$ (криві 1), $\tau = 0.05$ (криві 2) і $\tau = 0.25$ (криві 3). Тут і надалі, якщо не зазначено інше, рис. а побудовані для $d_1 = 0.5$, а рис. б для $d_1 = 1.5$

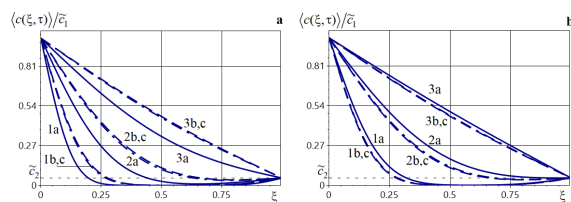


Рисунок 1. Розподіли усередненої концентрації дифундуючих частинок для різних моделей в різні моменти безрозмірного часу для $d_1 = 0.5$ (а) та $d_1 = 1.5$ (б)

Зазначимо, що застосування моделі дифузії домішок для розрахунку усередненої за ансамблем конфігурацій фаз концентрації у двофазному шарі з рівномірним розподілом фаз у тілі призводить до результатів, відмінних від отриманих з використанням моделей дифузії з характеристиками матриці, чи усередненими за об'ємом (рис. 1). Зі збільшенням часу протікання процесу дифузії функції концентрації за всіма моделями зростають, доки не вийдуть на стаціонарний режим (криві 3б,с на рис. 1а і криві 3а на рис. 1б), причому різниця між ними зменшується.

VII. ВИСНОВКИ

Отже проведено моделювання процесу масоперенесення частинок домішки у багатофазному випадково неоднорідному тілі. На міжфазних границях задано неідеальні умови контакту щодо концентрації домішкової речовини. На основі рівняння балансу маси для усього тіла отримано стохастичне диференціальне рівняння масоперенесення домішки для тіла в цілому, оператор якого містить стрибки шуканої функції та її похідної на випадкових міжфазних границях.

Отриманій крайовій задачі поставлено у відповідність інтегро-диференціальне рівняння з випадковим ядром, розв'язок якого побудований у вигляді інтегрального ряду Неймана. Для дослідження структури цього ряду введено графічне зображення його елементів у вигляді діаграм Р. Фейнмана. Проведено усереднення випадкового поля концентрації за ансамблем конфігурацій фаз. З використанням топологічних ознак діаграм усереднений ряд Неймана виражено через суму певної нескінченної підпоследовності цього ж ряду. Запропоновано класифікацію діаграм з групуванням на сильно- і слабо- зв'язані діаграми. Ядро масового оператора побудовано на основі суми всіх сильнозв'язаних діаграм.

Використання техніки діаграм Фейнмана дозволило отримати інтегро-диференціальне рівняння Дайсона для усередненого поля концентрації. Сконструйовано спрощений оператор рівняння Дайсона у випадку наближення Бурре. Диференціальне рівняння на усереднене поле концентрації сконкретизовано для випадку N фаз, рівномірно розподілених в області тіла.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Budzik, K.; Gaiotto, D.; Kulp, J.; Wu, J.; Yu, M. Feynman diagrams in four-dimensional holomorphic theories and the operator. *J. High Energy Phys.* 2023, 7, 127. [https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2023\)127](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2023)127)
- [2] Sidler, D.; Hamm, P. A Feynman diagram description of the 2D-Raman-THz response of amorphous ice. *J. Chem. Phys.* 2020, 153, 044502. <https://doi.org/10.1063/5.0018485>
- [3] Ananthanarayan, B.; Das, A.B.; Wyler, D. Hopf algebra structure of the two-loop three-mass nonplanar Feynman diagram. *Phys. Rev. D* 2021, 104, 076002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.076002>
- [4] Pukach, P.; Chernukha, O.; Chernukha, Y.; Vovk, M. Three-Dimensional Mathematical Modeling and Simulation of the Impurity Diffusion Process Under the Given Statistics of Systems of Internal Point Mass Sources. *Modelling* 2025, 6, 23. <https://doi.org/10.3390/modelling6010023>
- [5] Pukach, P.; Chernukha, Y.; Chernukha, O.; Bilushchak, Y.; Vovk, M. Mathematical modeling of impurity diffusion processes in a multiphase randomly inhomogeneous body using Feynman diagrams. *Symmetry* 2025, 17, 920. <https://doi.org/10.3390/sym17060920>
- [6] Crank, J. *The Mathematics of Diffusion*, 2nd ed.; Clarendon Press: Oxford, UK, 1975.
- [7] Münster, A. *Chemische Thermodynamik*; De Gruyter: Berlin, Germany, 1970.
- [8] Chaplya, E.Y.; Chernukha, O.Y.; Pelekh, P.R. Mathematical modeling of heat-conduction processes in randomly inhomogeneous bodies using Feynman diagrams. *J. Math. Sci.* 2009, 160, 503–510.
- [9] Rytov, S.M.; Kravtsov, Y.A.; Tatarskii, V.I. *Principles of Statistical Radiophysics 2: Correlation Theory of Random Processes*; Springer: Berlin, Germany, 1988.
- [10] Wladimirov, V. *Gleichungen der Mathematischen Physik*; Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin, Germany, 1972.